

MATEMATYKA

ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.

Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.
2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.
3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.
4. Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.
4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
- 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia, np.:
 - a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
 - b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, to nie jest kwadratem liczby całkowitej;
- 3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
- 4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
- 5) stosuje monotoniczność potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
- 6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
- 7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania typu: $|x + 4| = 5$;
- 8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
- 9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
- 4) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;
- 2) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów;
- 3) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 4) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;
- 5) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$, $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$;
- 6) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, np.: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$;
- 2) interpretuje równania i nierówności liniowe spreczne oraz tożsamościowe;
- 3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
- 5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ oraz nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci

- iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
- 2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne, które dadzą się sprowadzić do równania lub nierówności liniowej lub kwadratowej;
 - 3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych;
 - 4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną;
 - 5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności: wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają określone znaki bądź należą do określonego przedziału, wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów;
 - 6) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
 - 7) rozwiązuje równania wymierne postaci $V(x)/W(x) = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto rozwiązuje układy równań liniowych i kwadratowych z dwiema niewiadomymi, które można sprowadzić do równania kwadratowego lub liniowego, a które nie są trudniejsze niż

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey = f \end{cases}.$$

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- 5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
- 7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
- 8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
- 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
- 10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- 11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
- 12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$;
- 13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
- 14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykresy funkcji $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- 2) posługuje się złożeniami funkcji;

- 3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaz, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

VI. Ciągi.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie;
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;
- 2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;
- 2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
- 3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$;
- 4) oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty prostokątne, w tym z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) stosuje miarę łukową, zamienia stopnie na radiany i odwrotnie;
- 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;

- 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
- 4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
- 5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
- 6) rozwiązuje równania trygonometryczne;
- 7) stosuje twierdzenie sinusów;
- 8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
- 3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- 4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
- 5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
- 6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
- 7) stosuje twierdzenie Talesa;
- 8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
- 9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
- 10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- 11) przeprowadza dowody geometryczne;
- 12) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu;
- 2) stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość do innej prostej);
- 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- 4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
- 5) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu;
- 2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;
- 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie;
- 4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej do danego okręgu.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
- 3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

- 4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii;
- 6) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;
- 2) wyznacza przekroje sześciianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

XI. Kombinatoryka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
- 2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności, np.:
 - a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
 - b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji;
- 2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
- 2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;
- 2) stosuje schemat Bernoullego.

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);
- 2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji;
- 3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
- 4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
- 5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
- 6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Warunki i sposób realizacji

1. Korelacja.

Ze względu na użyteczność matematyki i jej zastosowania w szkolnym nauczaniu fizyki, informatyki, geografii i chemii zaleca się zrealizować treści nauczania określone w działach: I pkt 9 (logarytmy) i w miarę możliwości V pkt 14, V pkt 1 (pojęcie funkcji) i V pkt 5 (funkcje liniowe) w pierwszym półroczu klasy I, zaś treści nauczania określone w działach: V pkt 11 (funkcje kwadratowe) i V pkt 13 (proporcjonalność odwrotna) nie później niż do końca klasy I. Treści nauczania określone w dziale VI pkt 2 (obliczanie początkowych wyrazów ciągów określonych rekurencyjnie) można realizować w korelacji z analogicznym zagadnieniem podstawy programowej z informatyki.

2. Oznaczenia.

Uczniowie powinni używać powszechnie przyjętego oznaczenia zbiorów liczbowych, a w szczególności: dla liczb naturalnych symbolu N , dla liczb całkowitych symbolu Z , dla liczb wymiernych symbolu Q , dla liczb rzeczywistych symbolu R .

3. Przedziały.

Uczeń powinien wykorzystywać przedziały do opisu zbioru rozwiązań nierówności. Najważniejsza w odpowiedzi jest jej poprawność. Na przykład rozwiązanie nierówności $x^2 - 9x + 20 > 0$ może być zapisane na każdy z poniższych sposobów:

- 1) rozwiązaniem nierówności może być każda liczba x , która jest mniejsza od 4 lub większa od 5;
- 2) rozwiązaniami są wszystkie liczby x , mniejsze od 4 i wszystkie liczby x większe od 5;
- 3) $x < 4$ lub $x > 5$;
- 4) $x \in (-\infty, 4)$ lub $x \in (5, \infty)$;
- 5) $x \in (-\infty, 4) \cup (5, \infty)$.

4. Zastosowania logarytmów.

Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarymiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością. Poniższe przykładowe zadania ilustrują zastosowania logarytmu.

Z1. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Siła ta jest opisana wzorem $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 25 kwietnia 2015 r. w Nepalu miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

Z2. Chory przyjął dawkę 100 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie t określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$. Po pięciu godzinach organizm usuwa 30 % leku. Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby.

5. Zastosowanie algebry.

Warunkiem powodzenia procesu nauczania matematyki jest sprawne posługiwanie się wyrażeniami algebraicznymi. Metody algebraiczne często dają się stosować w sytuacjach

geometrycznych i na odwrót ilustracja geometryczna pozwala lepiej zrozumieć zagadnienia algebraiczne.

6. Przekształcenia równoważne.

W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania (metoda analizy starożytnych). Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Ponadto uczniowie powinni wiedzieć, że uprawnioną metodą dowodzenia jest równoważne przekształcanie tezy.

7. Postać kanoniczna.

Przy omawianiu funkcji kwadratowej należy podkreślać znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli, a także pojęcie i własności wyróżnika są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

8. Złożenia funkcji i funkcje odwrotne.

Definicja funkcji złożonej pojawia się dopiero w zakresie rozszerzonym, ale już w zakresie podstawowym oczekuje się od ucznia umiejętności operowania równocześnie danymi zaczerpniętymi z kilku źródeł. Nie wymaga to jednak formalnego wprowadzenia operacji złożenia czy odwracania funkcji.

9. Ciągi.

Zagadnienie to należy omawiać tak, aby uczniowie zdali sobie sprawę, że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy podkreślić, że poza ciągami niemalejącymi, rosnącymi, nierosnącymi, malejącymi i stałymi istnieją też takie, które nie są monotoniczne. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie, np. szybkość rozprzestrzeniania się plotki (liczba a_n podaje, ile osób o plotce słyszało).

10. Granica ciągu.

Przed sformułowaniem definicji granicy ciągu warto zadawać uczniom pytania w rodzaju: czy istnieje taka liczba naturalna k , że dla każdej liczby naturalnej n większej od k zachodzi nierówność $\frac{1}{3} < \frac{n}{2n+1} < \frac{2}{3}$? Twierdzenie o trzech ciągach wspiera także budowanie intuicji granicy ciągu. Obliczanie granic ciągów warto poprzedzić wykorzystaniem programów komputerowych do rysowania wykresów ciągów. Dokładniejsze obliczenia ułatwią w odpowiednio dobranych przykładach formułowanie hipotez na temat istnienia wartości granicy ciągu.

11. Funkcje trygonometryczne.

Funkcje trygonometryczne, oprócz szerokich zastosowań w fizyce, służą do opisu związków miarowych w figurach płaskich oraz bryłach (np. twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów). W wielu sytuacjach dla danego argumentu nie są potrzebne dokładne wartości tych funkcji, tylko ich przybliżenia. Uczniowie powinni umieć korzystać z tablic matematycznych jak i kalkulatora w dwóch celach: wyznaczania przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta oraz określenia kąta, dla którego funkcja trygonometryczna osiąga określoną wartość.

12. Planimetria.

Rozwiązywanie klasycznych problemów geometrycznych jest skutecznym sposobem kształtowania świadomości matematycznej. Uczniowie, którzy rozwiązują zadania konstrukcyjne, nabywają przez to wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu, np. uczeń z łatwością przyswoi własności okręgów wpisanych w trójkąt czy czworokąt, jeśli potrafi skonstruować te figury. Nauczanie konstrukcji geometrycznych można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla, można też używać specjalistycznych programów komputerowych, takich jak np. GeoGebra.

13. Dwumian Newtona.

Ważne jest, żeby przy okazji nauczania wzoru na $(a + b)^n$ podkreślić znaczenie współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona) $\binom{n}{k}$ w kombinatoryce. Warto go również zapisywać w postaci $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}$, gdyż w tej formie jest bardziej widoczna jego interpretacja i łatwiej obliczyć jego wartość dla małych k .

14. Rachunek prawdopodobieństwa.

Uczniowie w przyszłości będą mieli do czynienia z zagadnieniami powiązаныmi z losowością, które występują w różnych dziedzinach życia i nauki, np. przy analizie sondaży, zagadnień z zakresu ekonomii i badaniach rynków finansowych lub w naukach przyrodniczych i społecznych. Warto wspomnieć o paradoksach rachunku prawdopodobieństwa, które pokazują typowe błędy w rozumowaniu, i omówić niektóre z nich. Warto też przeprowadzać z uczniami eksperymenty, np. eksperyment, w którym uczniowie zapisują długi ciąg orłów i reszek bez losowania, a następnie zapisują ciąg orłów i reszek powstały w wyniku losowych rzutów monetą. Błędne intuicje na temat losowości podpowiadają zwykle, że nie powinny pojawiać się długie sekwencje orłów (albo reszek), podczas gdy w rzeczywistości takie długie sekwencje orłów (lub reszek) występują.

W zakresie rozszerzonym jest ważne uświadomienie uczniom, że rachunek prawdopodobieństwa nie ogranicza się jedynie do schematu klasycznego i używanej tam kombinatoryki. Dobrą ilustracją są przykłady zastosowania schematu Bernoullego dla dużej liczby prób.

15. Pochodne.

Posługiwanie się pojęciem granicy ilorazu różnicowego konieczne do zrozumienia pojęcia pochodnej wymaga dużych możliwości poznawczych. Dlatego też pochodne należy wprowadzać w pierwszej kolejności intuicyjnie, posługując się interpretacją fizyczną (prędkość chwilowa, natężenie prądu) oraz geometryczną (styczna, nachylenie wykresu). Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna.

16. Dowody.

Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów rozwija takie umiejętności, jak: logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów. Dowodzenie pozwala doskonalić umiejętność dobierania trafnych argumentów i konstruowania poprawnych rozumowań. Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia jest analizowanie dowodów poznawanych twierdzeń. Można uczyć w ten sposób, jak powinien wyglądać właściwie przeprowadzony dowód. Umiejętność formułowania poprawnych

rozumowań i uzasadnień jest ważna również poza matematyką. Na poziomie rozszerzonym język matematyczny powinien osiągnąć wyższy stopień sformalizowania. Uczeń powinien poznać dowody następujących twierdzeń.

Twierdzenia, dowody – zakres podstawowy:

- 1) Istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych;
- 2) Niewymierność liczb: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$ itp.;
- 3) Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego;
- 4) Podstawowe własności potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów;
- 5) Wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego;
- 6) Twierdzenie o kątach w okręgu:
 - a) kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku,
 - b) jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach;
- 7) Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym. Jeśli odcinek CD jest wysokością trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym ACB , to $|AD| \cdot |BD| = |CD|^2$, $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$ oraz $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$;
- 8) Twierdzenie o dwusiecznej. Jeśli prosta CD jest dwusieczną kąta ACB w trójkącie ABC i punkt D leży na boku AB , to $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$;
- 9) Wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$;
- 10) Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia, dowody – zakres rozszerzony:

- 1) Dowód kombinatoryczny tożsamości: jeśli $0 < k < n$, to $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$;
- 2) Wzór dwumianowy Newtona. Wzory skróconego mnożenia na $a^n \pm b^n$ (przy odpowiednich założeniach o n) oraz jako wniosek: dla liczb całkowitych a i b , $(a-b)|(a^n - b^n)$;
- 3) Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x - a$ wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia.
- 4) Wzory Viète'a;

- 5) Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów;
- 6) Twierdzenie sinusów;
- 7) Twierdzenia o istnieniu niektórych punktów szczególnych trójkąta:
 - a) symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie i (jako wniosek) proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie,
 - b) środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie;
- 8) Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg. Czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy
$$|\angle BAD| + |\angle BCD| = |\angle ABC| + |\angle ADC| = 180^\circ;$$
- 9) Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu. W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$;
- 10) Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny. Dane są proste k , l i m leżące na jednej płaszczyźnie. Jeśli proste k i l mają dokładnie jeden punkt wspólny i prosta n jest do nich prostopadła, to prosta n jest także prostopadła do prostej m ;
- 11) Twierdzenie o trzech prostopadłych. Prosta k przecina płaszczyznę P i nie jest do niej prostopadła. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę P . Prosta m leży na płaszczyźnie P . Wówczas proste k i m są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste l i m są prostopadłe.