

TRYGONOMETRIA C2I

I. oblicz dokładne wartości wyrażen

1) $\sin 15^\circ$

2) $\cos 105^\circ$

3) $\operatorname{tg} 75^\circ$

4) $\sin 22,5^\circ$

5) $\cos 112,5^\circ$

6) $\cos 33^\circ$ jeżeli $\sin 12^\circ = k$

10) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

11) $\cos 75^\circ - \sin 75^\circ$

12) $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)(\cos 15^\circ - \cos 75^\circ)$

7) $\sin 43^\circ \cos 17^\circ + \cos 43^\circ \sin 17^\circ$

8) $\sin 105^\circ \cdot \cos 105^\circ$

9) $\cos 415^\circ - \sin 415^\circ$

100

13) $\sin 52,5^\circ \cdot \sin 7,5^\circ$

14) $\sin 37,5^\circ \cdot \cos 7,5^\circ$

15)

II 1). wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{12}{5}$ $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ $\beta \in (270^\circ, 360^\circ)$

oblicz a) $\cos(\alpha - \beta)$

b) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

c) $\cos 4\alpha$

2). wiadomo, że $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ i $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ oblicz

a) $\sin 4\alpha$

b) $\cos 3\alpha$

c) $\operatorname{tg} 4\alpha$

III Wykazi, że jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ i $\operatorname{tg} \alpha = 3$, i $\operatorname{tg} \beta = 2$ to $\gamma = 45^\circ$

IV Wykazi, że jeżeli α, β, γ - kąty trójkąta i $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$ to ten trójkąt jest równoboczny

V Wykazi, że przy odpowiednich założeniach prawdziwe są wzory.

a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\frac{\sin \alpha + \sin 4\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$

d) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

e) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha} = \cos 2\alpha$

f) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

g) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$

h) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha$

i) $\frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

j) $\frac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha} - \frac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha} = 2$

k) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{4 - 3 \sin^2 2\alpha}{4}$

l) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha)$

m) $\frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 4\alpha + \cos \alpha} = 2 \sin \alpha$

n) $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

o) $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

p) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

Funkcje trygonometryczne - zakres rozszerzony

- Wykaż, że jeżeli $\sin \alpha - \cos \alpha$ jest liczbą wymierną, to $\cos 4\alpha$ też jest liczbą wymierną.
- Oblicz $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, jeżeli $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- Wykaż, że $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$.
- Określ znak wyrażenia $\sin x + \cos x$, jeżeli $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ i $(1 + \sin x) (\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x) = -\frac{1}{3}$.
- Wykaż, że $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) \leq 1$.
- Sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego oraz liczba 1 tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sinus najmniejszego kąta tego trójkąta.
- Wykaż, że $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$, a następnie udowodnij, że jeżeli α i β są takimi kątami trójkąta, że $\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$, to ten trójkąt jest prostokątny lub równoramienny.
- Wykaż, że jeżeli $\cos(\alpha + \beta) = 0$, to $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha$.
- Wykaż, że:
 - $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$
 - $\frac{1 - 4 \sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ} = 1$
 - $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$
 - $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$
 - $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \sin 1^\circ$
- Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to:
 - $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
 - $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$
 - $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1$
 - $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma$
 - $\frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$
- Sporządź wykresy poniższych funkcji:
 - $f(x) = \sin x + \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$, gdy $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$
 - $f(x) = \sqrt{\sin^2 2x}$
 - $f(x) = \sin^2 \frac{1}{2}x$
 - $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$
 - $f(x) = \cos^2 x$
 - $f(x) = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$, gdy $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$
 - $f(x) = \frac{|\sin x| + \sin x}{\cos x}$
 - $f(x) = \sqrt{2}(\sin x + |\cos x|)$, gdy $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$
 - $f(x) = -4|\sin x| \cdot \cos x$, gdy $x \in \langle 0, 3\pi \rangle$
 - $f(x) = |1 - 2 \cos 2x|$
 - $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$
 - $f(x) = 2 \sin x + |\sin x|$
 - $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$
 - $f(x) = -3 \cos 2x$
- Wyznacz zbiór wartości podanych funkcji (najmniejszą i największą wartość).
 - $y = \sin x - \cos x + 3$
 - $y = \sin^4 x + \cos^4 x$
 - $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos^2 x$
 - $y = 2 \sin^2 x - \sin x - 1$
 - $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$
 - $y = \sin^6 x + \cos^6 x$
 - $y = 4 \cos^2 x - 4 \sin x$
 - $y = a \sin x + b \cos x$
 - $y = \sin^2 x - \sin x \cos x$
 - $y = \frac{1}{4} \cos^2 x + \sin^2 x$
 - $2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$, gdy $x \in \langle 0, 4\pi \rangle$
 - $\sin(x + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, gdy $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 - $\sin 3x - \sin x = \sin 2x$
 - $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$, gdy $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 - $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \cos(\frac{\pi}{2} + x) = 0$
 - $\operatorname{tg}^4 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$
- Rozwiąż równania.
 - $-2 \cos^2 x + \sin x + 1 = 0$
 - $\cos^2 \frac{1}{2}x - \cos x = 0$, gdy $x \in \langle 0, 3\pi \rangle$
 - $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 4 \sin 2x$
 - $\sin x - \sqrt{3} \cos x = -1$
 - $\sin^2 x + \cos x = 1$
 - $2 \cos^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$, gdy $x \in \langle -\pi, 3\pi \rangle$
 - $2 \operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2 \cos x + \operatorname{tg} x$

- (n) $\cos^2 2x + 4 \cos^2 x = 2$ (t) $\cos 2x + \sin 2x + 1 = 0$, gdy $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$
 (o) $\sin x \cdot \sin 2x = \frac{3}{2} \cos x$ (u) $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$
 (p) $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$ (v) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$
 (q) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ (w) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$
 (r) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \cos x = 1 - \sin x$ (x) $\sin x + \sin 5x = 2 \cos 2x$
 (s) $\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ (y) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$
14. Rozwiąż nierówności.
- (a) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \sqrt{3}$ (h) $\sin 3x < \sin x$, gdy $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 (b) $\cos^2 x + \frac{3}{2} \sin x - 2 > 0$, gdy $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (i) $\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots < 1 + \cos x$,
 gdy $x \in (0, 2\pi)$
 (c) $2 \cos^2 x > 3 \sin x$ (j) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x + \dots \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
 (d) $6 \sin^2 x + 7 \cos x > 1$ (k) $4 \sin^3 x \leq 3 \sin x$, gdy $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$
 (e) $\cos 2x + 2 \leq 3 \cos x$, gdy $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$ (l) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 < 0$
 (f) $\frac{\cos 2x}{\cos x} < 1$ (m) $\cos^2 \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cos x > 0$, gdy $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 (g) $\frac{\cos 2x}{\sin x} \geq -1$
15. Dla jakich wartości x liczby: $(\sin^2 x, \cos x, \operatorname{tg} x)$ tworzą ciąg geometryczny?
16. Dla jakich wartości m równanie $(m - 2) \cos x = 4m^2 - 16$ ma rozwiązanie?
17. Dla jakich wartości α najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - 2x + \cos 2\alpha + \sin \alpha + 3$ wynosi 2?
18. Dla jakich wartości α suma kwadratów różnych pierwiastków równania $x^2 - 2x \sin \alpha - \cos^2 \alpha = 0$ jest równa 3?
19. Dla jakich wartości α rozwiązaniem układu $\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = 1 \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0 \end{cases}$ jest para liczb (x, y) , spełniająca warunek $x^2 + y - 1 = 0$?
20. Dana jest funkcja $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.
- (a) Podaj zbiór wartości funkcji.
 (b) Rozwiąż równanie $f(x) = 1$.
21. Dane jest równanie $(\cos x - 1)(\cos x + p + 1) = 0$.
- (a) Dla $p = -1$ wyznacz rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 5 \rangle$.
 (b) Dla jakich wartości p równanie w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ ma 3 różne rozwiązania?
22. Dla jakich wartości $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ równanie $(\cos \alpha + 1)x^2 - (2\sqrt{2} \cos \alpha)x + 1 = 0$ ma 2 różne pierwiastki jednakowych znaków?
23. Dla jakich wartości $x \in \langle 0, \pi \rangle$ liczby: $(\cos^2 x, \cos^2 x + \sin x, \cos^2 x + 2 \sin x)$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym suma czterech początkowych wyrazów wynosi 6?

Zad 13 od. Rozwiż równania

- 1) $2 \cos^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$ gdy $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi \rangle$ 9) $\sin^3 x - 3 \sin x \cos^2 x - 3 \cos^3 x + \sin^2 x \cos x = 0$
 2) $2 \sin^2 x - 7 \cos x - 5 = 0$ gdy $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ 10) $3 \sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 3) $\cos 2x + 2 = 3 \cos x$ 11) $2 \cos^4 x + 5 \sin^2 x = 3$ $x \in \langle 0, \pi \rangle$
 4) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ $x \in \langle 0, 3\pi \rangle$ 12) $\sin 6x + \cos 3x = 2 \sin 3x + 1$ $x \in \langle 0, \pi \rangle$
 6) $\sin^2 2x - 4 \sin^2 x + 1 = 0$ $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$ 13) $4 \sin x \cos^2 x - 1 = 2 \sin 2x - \cos x$ $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 7) $(4 \sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3 \sin^2 x$ 14) $\cos x (\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2} \sin x$
 8) $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$ $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ 15) $4 \sin^2 x \cos 2x = 2 \sin 9x - 1$ $x \in \langle 0, \pi \rangle$