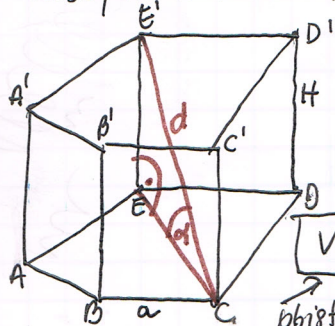


GRANIASTOSEUPY PROSTE - mają dwie podstawy, które są przystającymi wielokątami leżącymi w równoległych płaszczyznach, oraz ściany boczne, które są prostokątami.



n - liczba boków podstawy to graniastosłup ma $n+2$ ścian, $2n$ wierzchołków oraz $3n$ krawędzi.

H - wysokość (krawędź boczna) jest prostopadła do obu podstaw

α - kąt nachylenia przekątnej d do płaszczyzny podstawy

$$V = P_p \cdot H$$

objętość

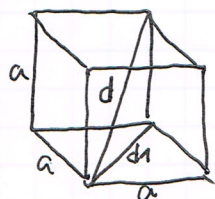
$$P_c = 2P_p + P_b$$

pole całkowite

$$P_b = lH$$

l - obwód podstawy

Sześcian



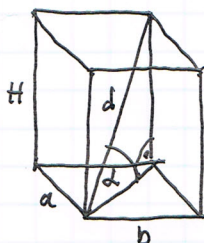
$$d_1 = a\sqrt{2}$$

$$d = a\sqrt{3}$$

$$V = a^3$$

$$P_c = 6a^2$$

Prostopadłościan (w podstawie prostokąt)



α - kąt nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy.

$$P_p = ab$$

$$P_b = 2aH + 2bH$$

$$V = abH$$

$$P_c = 2ab + 2aH + 2bH$$

GRANIASTOSEUPY PRAWIDŁOWE - w podstawie wielokąt foremny, a ściany boczne to identyczne prostokąty

a) trójkątny

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

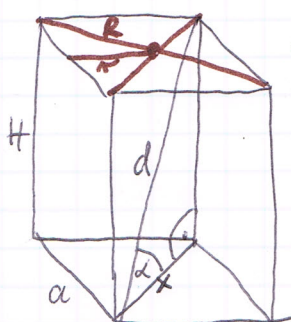
$$r = \frac{1}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{2}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$P_b = 3aH$$

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

b) czworokątny

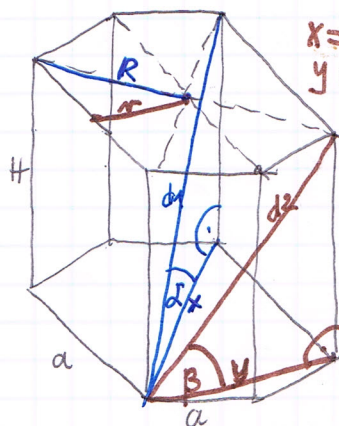


α - kąt nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy

$$P_c = 2a^2 + 4aH$$

$$V = a^2 \cdot H$$

c) sześciokątny



$$x = 2a$$

$$y = a\sqrt{3}$$

$$P_p = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

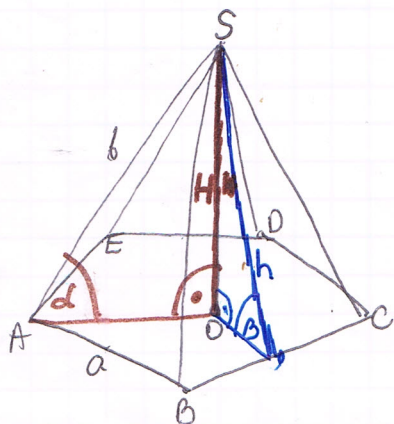
$$P_b = 6aH$$

$$R = a$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

d_1, β - kąty nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy

OSTROSTĘPY - wielościan, którego podstawa jest dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.



O - spodek wysokości

α - kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy

β - kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy

n - ilość boków podstawy, to ostrosłup ma: $n+1$ ścian, $n+1$ wierzchołków i $2n$ krawędzi

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

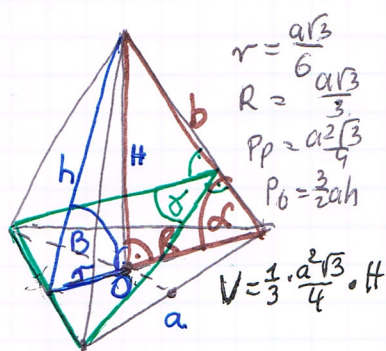
objętość

$$P_c = P_p + P_b$$

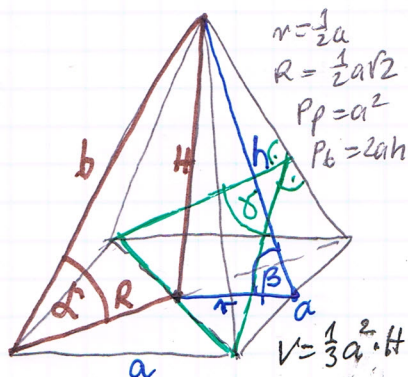
pole powierzchni całkowitej

OSTROSTĘPY PRAWIDŁOWE - w podstawie wielokąt foremny, a ściany boczne to identyczne trójkąty równoramienne

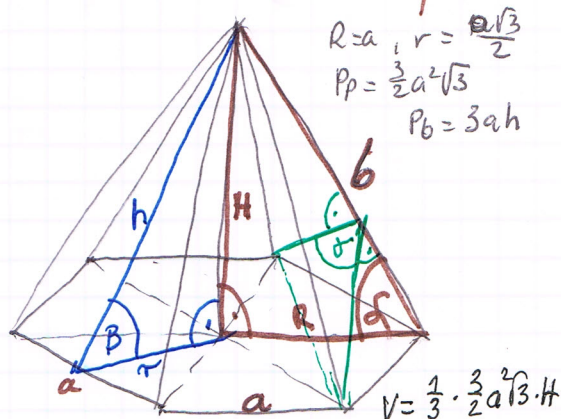
a) trójkątny



b) czworokątny

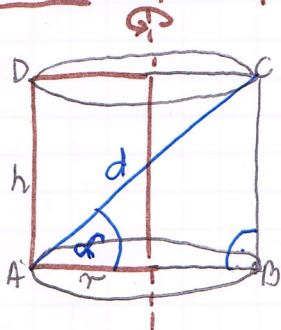


c) sześciokątny



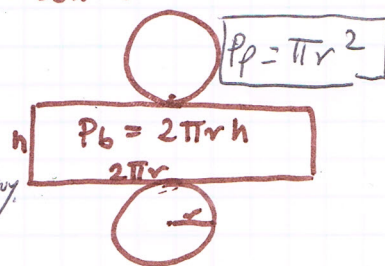
α - kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
 β - kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
 γ - kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi.

WALEC - powstaje z obrotu prostokąta wokół jednej z boków

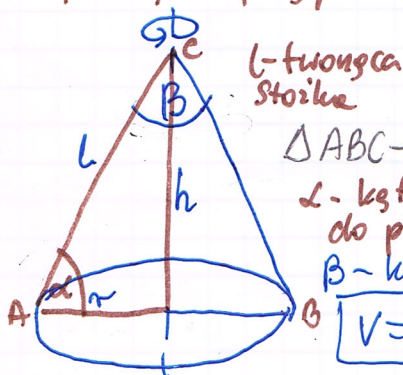


Prostokąt ABCD - przekrój osiowy walca
 α - kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do płaszczyzny podstawy

$$V = P_p \cdot h \quad P_c = 2P_p + P_b$$



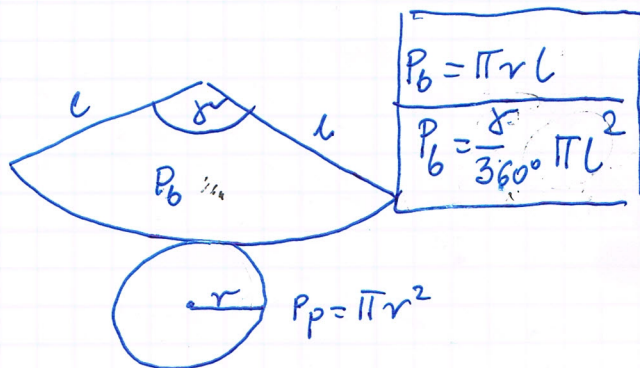
STOŻEK - powstaje z obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z przyprostokątnych



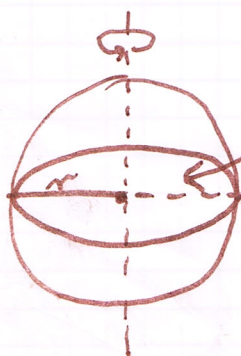
L - tworząca stożka

ΔABC - przekrój osiowy stożka
 L - kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy
 β - kąt rozwarcia stożka

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h \quad P_c = P_p + P_b$$



KULA - powstaje z obrotu koła wokół średnicy



przekrój osiowy (koło wielkie kuli)

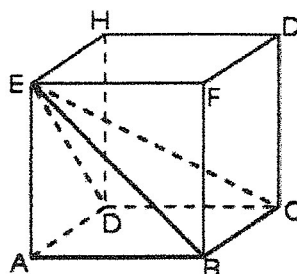
Powierzchnia boczna kuli to sfera.

$$P_c = 4\pi r^2 \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

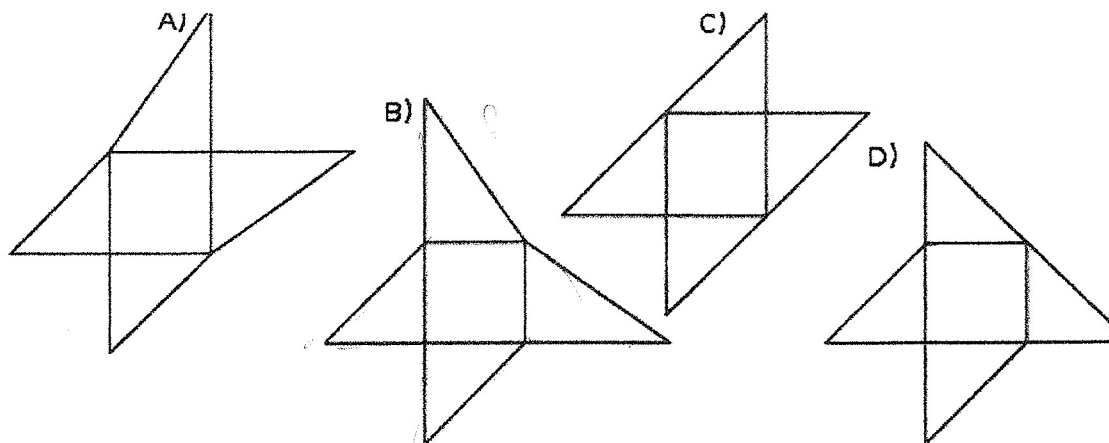
9 Stereometria (podstawowa)

9.1 Zadania zamknięte

1. (CKE VI/2011) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$.



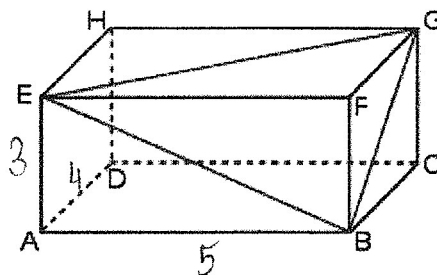
Siatką ostrosłupa czworokątnego $ABCDE$ jest



2. (CKE VIII/2010) Graniastosłup ma 15 krawędzi. Ile wierzchołków ma ten graniastosłup?
- (a) 10 (b) 5 (c) 15 (d) 30
3. (CKE V/2010) Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa
- (a) 11 (b) 18 (c) 27 (d) 34
4. (INF CKE 2008) Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 24. Objętość tego sześcianu jest równa
- (a) 64 (b) 27 (c) 24 (d) 8

5. (CKE V/2010) Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe
- (a) 94 (b) 60 (c) 47 (d) 20
6. (CKE V/2012) Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa
- (a) 6 (b) 8 (c) 24 (d) 64
7. (CKE VIII/2011) Krawędź sześcianu ma długość 9. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa
- (a) $\sqrt[3]{9}$ (b) $9\sqrt{2}$ (c) $9\sqrt{3}$ (d) $9 + 9\sqrt{2}$
8. (CKE V/2013) Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 10 większa od liczby wszystkich jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą graniastosłupa jest
- (a) czworokąt (c) sześciokąt
(b) pięciokąt (d) dziesięciokąt
9. (CKE VIII/2010) Objętość sześcianu jest równa 27cm^3 . Jaka jest suma długości wszystkich krawędzi tego sześcianu?
- (a) 18cm (b) 36cm (c) 24cm (d) 12cm
10. (INF CKE 2008) Przekątna sześcianu ma długość 3. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe.
- (a) 54 (b) 36 (c) 18 (d) 12
11. (CKE V/2013) Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 7 jest równa $28\sqrt{3}$. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa wynosi
- (a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16
12. (III/2013) Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6, a kąt nachylenia jego przekątnej do płaszczyzny podstawy jest równy 60° . Długość tej przekątnej jest równa
- (a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) $4\sqrt{3}$

13. (INF CKE 2008) Przekątna prostopadłościanu o wymiarach $2 \times 3 \times 5$ ma długość
- (a) $\sqrt{13}$ (b) $\sqrt{29}$ (c) $\sqrt{34}$ (d) $\sqrt{38}$
14. (INF CKE 2008) Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 24cm^2 . Objętość tego sześcianu jest równa
- (a) 8cm^3 (b) 16cm^3 (c) 27cm^3 (d) 64cm^3
15. (CKE XI/2009) Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 150cm^2 . Długość krawędzi tego sześcianu jest równa
- (a) $3,5\text{cm}$ (b) 4cm (c) $4,5\text{cm}$ (d) 5cm
16. (CKE V/2011) Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu wynosi
- (a) 3 (b) $\sqrt{6}$ (c) 9 (d) $3\sqrt{3}$
17. (CKE V/2011) W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



- (a) AB (b) BG (c) GE (d) EB
18. (CKE VIII/2011) W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie są tej samej długości. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 90. Wtedy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe
- (a) 300 (b) $300\sqrt{3}$ (c) $300 + 50\sqrt{3}$ (d) $300 + 25\sqrt{3}$
19. (INF CKE 2008) Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 6. Objętość tego walca jest równa
- (a) 18π (b) 54π (c) 108π (d) 216π

20. (CKE V/2011) Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa
- (a) 124π (b) 96π (c) 64π (d) 32π
21. (III/2013) Pole powierzchni ^{bocznej} walca, którego podstawa ma średnicę 4 jest równe 8π . Wysokość tego walca jest równa
- (a) 8 (b) 4 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$
22. (INF CKE 2008) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 6. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe
- (a) 12π (b) 18π (c) 27π (d) 36π
23. (CKE V/2012) Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Wysokość tego stożka jest równa
- (a) $2\sqrt{2}$ (b) 16π (c) $4\sqrt{2}$ (d) 8π
24. (CKE VI/2011) Stożek powstał w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 i 13 wokół krótszej przyprostokątnej. Promień podstawy tego stożka jest równy
- (a) 6 (b) 13 (c) 6,6 (d) 3
25. (CKE VIII/2011) Kula ma objętość $V = 288\pi$. Promień tej kuli jest równy
- (a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 12
26. (CKE V/2013) Pole powierzchni bocznej stożka o wysokości 4 i promieniu podstawy 3 jest równe
- (a) 9π (b) 12π (c) 15π (d) 16π

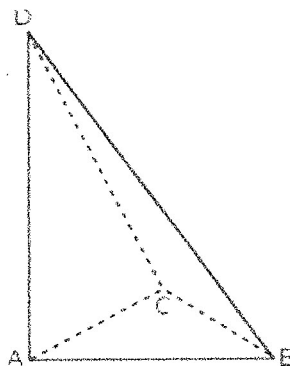
9.2 Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi (2pkt)

- (INF CKE 2008) Przekątna sześcianu ma długość 9. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.
- (INF CKE 2008) Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.
- (INF CKE 2008) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości 12. Wysokość stożka jest równa 8. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

WIELOŚCIANY - MATURA PODSTAWOWA

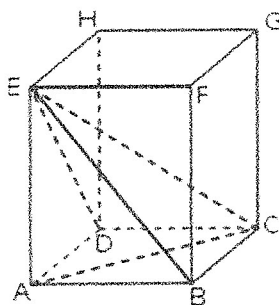
Zadanie 1. (4 pkt)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC . Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.



Zadanie 2. (4 pkt)

W graniastopie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy 60° . Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.



Zadanie 3. (4 pkt)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2 , a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 4. (4 pkt)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest romb $ABCD$ o boku długości 4. Kąt ABC rombu ma miarę 120° , $|AS| = |CS| = 10$ i $|BS| = |DS|$. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi BS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Zadanie 5. (5 pkt)

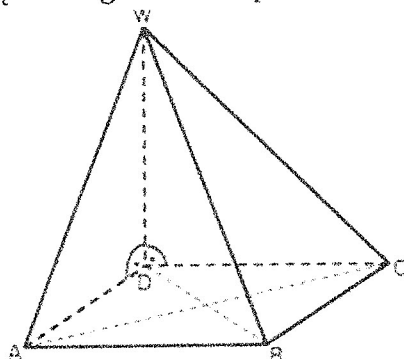
Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 8. Punkt D jest środkiem krawędzi AB , odcinek DS jest wysokością ostrosłupa. Krawędzie AS i BS mają długość 7. Oblicz długość krawędzi CS tego ostrosłupa.

Zadanie 6. (5 pkt)

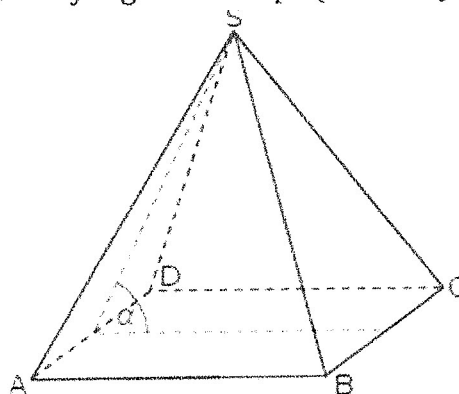
Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 8. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 7. (4 pkt)

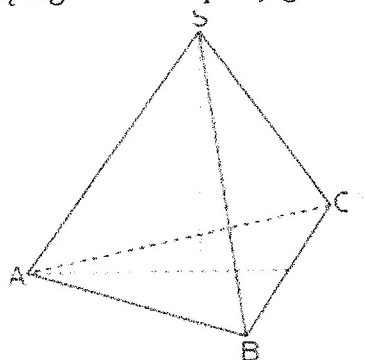
Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne AW , BW i CW mają następujące długości: $|AW| = 6$, $|BW| = 9$, $|CW| = 7$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Zadanie 8. (4 pkt)**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD S$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).

**Zadanie 9. (4 pkt)**

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ (tak jak na rysunku) jest równa 72, a promień okręgu wpisanego w podstawę ABC tego ostrosłupa jest równy 2. Oblicz tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa i jego ścianą boczną.



Wielościany – zakres podstawowy

1. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku 8 cm i kącie ostrym 60° . Dłuższa przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Oblicz objętość.
2. Długość wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa długości promienia okręgu opisanego na podstawie, a pole ściany bocznej ostrosłupa wynosi $18\sqrt{3}$. Oblicz objętość oraz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
3. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $144\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej $96\sqrt{3}$. Oblicz objętość ostrosłupa.
4. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokości przeciwległych ścian bocznych mają długość h i tworzą kąt o mierze 2α . Oblicz objętość ostrosłupa.
5. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy wynosi 8 cm i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma wspólny wierzchołek, kąt, którego cosinus wynosi $\frac{2}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej.
6. Dach wieży ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma 4 cm. Ściana boczna dachu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz, ile dachówek należy kupić aby pokryć ten dach wiedząc, że do pokrycia 1 m^2 potrzebne są 24 dachówki. Przy zakupie należy doliczyć 8% dachówek na zapas.
7. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi P , a pole podstawy S . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
8. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o długości krawędzi bocznej 6 cm jest równa $9\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.
9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy wynosi a , a kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę 2α . Oblicz objętość.
10. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeżeli promień okręgu opisanego na podstawie wynosi $R = 4\sqrt{3}$, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60^\circ$. Wyznacz $\sin \beta$, gdzie β to kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy. Oblicz objętość.
11. Pole całkowite graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $132\sqrt{3}$. Wiedząc, że pole powierzchni jednej ściany bocznej jest 3 razy większe od pola podstawy, oblicz objętość graniastosłupa oraz cosinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z krawędzią podstawy.
12. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o długości $12\sqrt{2}$ tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej.
13. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 1176, a ściana boczna tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz objętość oraz cosinus kąta, jaki tworzy krawędź boczna z krawędzią podstawy.
14. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° , a pole ściany bocznej wynosi $3\sqrt{33}$. Oblicz objętość ostrosłupa.
15. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna o długości 15 tworzy z podstawą kąt 45° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej.
16. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $36\sqrt{3}$, a ściana boczna tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej.
17. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, gdzie a – krawędź podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, a następnie, korzystając z tablic, wyznacz jego miarę z dokładnością do 1° .
18. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole ściany bocznej wynosi 36, a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 90° . Oblicz objętość.
19. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ostrosłupa ma miarę α , a promień koła opisanego na podstawie wynosi x . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej.
20. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku 6 cm. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, a pozostałe są nachylone do niej pod kątem 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej.

Bryły obrotowe – zakres podstawowy

1. Pole powierzchni całkowitej walca, w którym wysokość jest o 1 cm większa od promienia podstawy, wynosi $72\pi \text{ cm}^3$. Oblicz objętość walca.
2. Objętość walca wynosi $144\pi \text{ cm}^3$, a kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy ma miarę 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.
3. Dwa metalowe walce mają takie same wysokości: po 10 cm, a ich promienie różnią się o 2 cm. Walce te przetopiono i odlano z nich walec o objętości $1000\pi \text{ cm}^3$ i takiej samej wysokości jak walce poprzednie. Oblicz długości promieni przetapianych walców.
4. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $12\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni stożka.
5. Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 90π , a cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{2}{3}$. Oblicz objętość stożka.
6. Stosunek tworzącej stożka do jego wysokości wynosi 2:1, a objętość stożka jest równa 216π . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka. Trójkąt prostokątny o polu 30 cm^2 , którego przyprostokątne różnią się o 7 cm, obracano:
 - (a) wokół krótszej przyprostokątnej,
 - (b) wokół przeciwprostokątnej.Oblicz objętości i pola powierzchni całkowitej powstałych brył.
7. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest $\frac{1}{3}$ koła:
 - (a) o polu 48π ,
 - (b) a obwód podstawy stożka wynosi 16π ,
 - (c) a wysokość stożka wynosi 8 cm.Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej stożka.
8. Kąt rozwarcia stożka wynosi 2α , a objętość stożka jest równa V . Wyznacz pole powierzchni bocznej stożka.
9. Metalową kulę o promieniu $\sqrt[3]{2} \text{ cm}$ przetopiono na stożek, którego pole powierzchni bocznej jest 3 razy większe od pola podstawy. Wyznacz pole powierzchni całkowitej stożka.
10. Metalowy walec o średnicy 10 cm i wysokości 20 cm przetopiono i wykonano z niego 3000 jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.
11. Ile m^3 betonu potrzeba do ocembrowania studni o głębokości 8 m, jeżeli średnica wewnętrzna kręgów wynosi 1 m, a ich grubość 0,2 m? W obliczeniach przyjmij $\pi = 3,1$.
12. Do okrągłego garnka, częściowo napełnionego wodą, o średnicy 20 cm wpuszczono 300 kropli oliwy o promieniu 0,3 cm, które równomiernie rozlały się po powierzchni wody. Oblicz grubość warstwy oliwy w garnku.
13. Kapsuła ładownika ma kształt stożka zakończonego półkulą o takim samym promieniu jak promień stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa od promienia półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły.
14. Pole powierzchni bocznej stożka jest dwukrotnie większe od pola jego podstawy. Wyznacz miarę kąta rozwarcia stożka.
15. Ile procent objętości stożka stanowi objętość górnej jego części odciętej płaszczyzną równoległą do podstawy, przechodzącą przez punkt leżący na wysokości stożka w odległości $\frac{1}{3}$ wysokości od wierzchołka?
16. Kąt rozwarcia stożka wynosi 60° . Jaki jest kąt wycinka kołowego, który po zwinięciu tworzy powierzchnię boczną tego stożka?
17. Dwa zbiorniki w kształcie walców o wysokościach po 1 m mają łączną pojemność 740π litrów. Długości promieni tych zbiorników różnią się o 20 cm. Każdy ze zbiorników ma zostać pomalowany dwukrotnie farbą. Jeden litr farby wystarczy do pomalowania powierzchni $3,5 \text{ m}^2$. Ile puszek farby o pojemności 0,8 l każda należy zakupić na wykonanie tych prac?

18. Walec i stożek mają równe pola powierzchni bocznych, równe objętości, a tworząca stożka ma taką samą długość jak wysokość walca. Oblicz z dokładnością do 1° miarę kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.
19. Trapez równoramienny o podstawach a i $3a$ oraz kącie ostrym α , obracamy dookoła raz krótszej, a raz dłużej podstawy. Oblicz objętości otrzymanych brył.

Wielościany - zakres rozszerzony

1. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do innej ściany bocznej wynosi α , a promień koła wpisanego w podstawę ma długość r . Oblicz V i P_c .
2. Oblicz odległość środka ściany bocznej sześcianu od przekątnej sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu ma długość a .
3. Sześcian o krawędzi a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
4. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku a i kącie ostrym α . Krótsza przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt β . Oblicz V i P_c .
5. Przekątne ścian bocznych prostopadłościanu wychodzące z 1 punktu tworzą kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ i mają długość 8 cm i 12 cm. Oblicz V i P_c .
6. Graniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środek ciężkości górnej podstawy i krawędzi dolnej podstawy pod kątem 45° do dolnej podstawy. Pole otrzymanego przekroju wynosi $5\sqrt{6}$. Oblicz objętość graniastosłupa.
7. W graniastosłupie prawidłowym 6-kątnym płaszczyzna zawierająca przekątne sąsiednich ścian bocznych wychodzących z tego samego wierzchołka jest nachylona do podstawy pod kątem 60° , a pole przekroju graniastosłupa tą płaszczyzną wynosi $8\sqrt{3}$. Oblicz V .
8. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość x i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma punkt wspólny kąt α . Oblicz V oraz sinus kąta, jaki tworzy przekątna graniastosłupa ze ścianą boczną.
9. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Oblicz cosinus kąta między przekątną ściany bocznej, a inną ścianą boczną.
10. Suma wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 60. Wysokość jest o 2 większa od podstawy. Przez przekątną ściany bocznej i środek krawędzi bocznej, niezawierającej się w tej ścianie poprowadzono płaszczyznę. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
11. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy wynosi $2a$. Miara kąta między przekątną podstawy, a przekątną ściany bocznej wychodzącą z tego samego wierzchołka jest równa α . Oblicz objętość.
12. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeżeli krawędź boczna tworzy z krawędzią podstawy kąt α .
13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między ścianami bocznymi wynosi 120° . Oblicz kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
14. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole ściany bocznej wynosi S , a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α . Oblicz objętość.
15. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, krawędź podstawy ma długość a , a kąt między krawędzią boczną, a krawędzią podstawy wynosi 45° . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
16. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długości $3\sqrt{5}$, a pole powierzchni bocznej jest 2 razy większe od pola podstawy. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstaw i wierzchołek ostrosłupa. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
17. Wiedząc, że miara kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy wynosi 45° . Oblicz miarę kąta między ścianami bocznymi tego ostrosłupa.
18. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku $\sqrt{2}$. Wszystkie ściany boczne są równoramienne trójkątami prostokątnymi. Punkt P został wybrany wewnątrz ostrosłupa w taki sposób, że odległość tego punktu od każdej ze ścian ostrosłupa wynosi d . Sporządź rysunek i oblicz d .
19. Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy ma miarę α . Wykaż, że sinus kąta β nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy można wyznaczyć ze wzoru $\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

20. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a , ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi, a miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi wynosi 2α . Oblicz objętość.
21. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: wysokość H oraz kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$.
 - (a) Wykaż, że $V = \frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$.
 - (b) Wyznacz α jeżeli wiadomo, że $V = \frac{2}{9}H^3$.
22. Krawędź podstawy i wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa do krawędzi podstawy są równej długości i mają po $2x$. Oblicz cosinus kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi.
23. W ostrosłupie trójkątnym $ABCS$ o podstawie ABC i wierzchołku S dane są $|AB| = |AC| = |SB| = |SC| = 9$ i $|AS| = |BC| = 8$. Oblicz objętość ostrosłupa.
24. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = 30$, $|BC| = |AC| = 39$ i spodek wysokości ostrosłupa należy do podstawy. Każda wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołkami S ma długość 26. Oblicz V .
25. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC . Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość.
26. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
27. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy wynosi 4, a krawędź boczna 8. Oblicz pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej.
28. Dany jest ostrosłup trójkątny, którego podstawą jest trójkąt równoramienny o bokach 5 cm, 5 cm i 6 cm. Wysokość ostrosłupa wynosi 2 cm. Spadek wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę. Oblicz P_c ostrosłupa.
29. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H = 8$ cm i krawędź podstawy $a = 12$ cm. Przez krawędź podstawy i środki rozłącznych z nią krawędzi bocznych poprowadzono płaszczyznę. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
30. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie są równej długości. Oblicz cosinus kąta utworzonego przez 2 sąsiednie ściany boczne.
31. Krawędź podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego $ABCD$ ma długość a . Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 2α . Ostrosłupem przecięto płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i dzieli na połowy kąt pomiędzy ścianą boczną i podstawą. Oblicz pole powstałego przekroju tego ostrosłupa.
32. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest 2 razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.
33. W ostrosłupie $ABCS$ podstawy ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a . Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od ściany BCS jest równa d . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.
34. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o bokach 40, 40 i 48. Wszystkie krawędzie boczne mają po 65. Oblicz objętość.

Bryły obrotowe – zakres rozszerzony

1. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do pola powierzchni całkowitej wynosi 2:3.
 - (a) Wyznacz miarę kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.
 - (b) Oblicz objętość stożka, jeżeli wiadomo, że pole przekroju osiowego wynosi 5.
2. Walec i stożek mają równe tworzące, równe pola powierzchni bocznych i równe objętości.
 - (a) Oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.
 - (b) Jaka powinna być wysokość stożka, aby jego objętość była równa 7π ?
3. Kula o promieniu R i stożek mają równe objętości, a pole boczne stożka jest 3 razy większe od pola podstawy. Oblicz wysokość stożka.
4. Trójkąt prostokątny o polu 24, w którym stosunek przyprostokątnych wynosi 3:4, obracamy dookoła przeciwprostokątnej. Oblicz objętość i pole całkowite powstałej bryły.
5. Trapez prostokątny obraca się wokół boku tworzącego z podstawami kąty proste. Podstawy trapezu mają 10 cm i 7 cm, a pole trapezu wynosi 68 cm^2 . Oblicz objętość otrzymanej bryły.
6. Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła o kącie środkowym 120° , a pole podstawy stożka wynosi 6π . Oblicz objętość, cosinus kąta rozwarcia stożka oraz promień kuli wpisanej w ten stożek.
7. Wyznacz kąt między osią symetrii i tworzącą stożka, którego pole powierzchni całkowitej jest $\pi\sqrt{3}$ razy większe od pola przekroju osiowego.
8. W kulę wpisano stożek. Stosunek pola podstawy stożka do pola powierzchni kuli wynosi 3:16. Oblicz stosunek objętości tych brył.
9. Na kuli opisano stożek, którego pole powierzchni bocznej jest 3 razy większe od pola podstawy. Oblicz stosunek objętości tych brył.
10. W kulę o promieniu R wpisano stożek o kącie rozwarcia 2α . Oblicz objętość i pole całkowite stożka.
11. W kulę o promieniu R wpisano walec o promieniu $\frac{3}{5}R$. Wyznacz stosunek objętości walca do objętości kuli.
12. W stożek wpisano walec, którego wysokość jest równa średnicy podstawy stożka. Oblicz stosunek pól całkowitych obu brył, jeżeli tworząca stożka tworzy z wysokością stożka kąt α .