

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

ZESTAW ZADAŃ – POZIOM ROZSZERZONY

I. Kombinatoryka

Zadanie 1. Ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych, których zapis dziesiętny składa się tylko z 2 różnych cyfr?

Zadanie 2. Liczba permutacji n -elementowego zbioru jest 306 razy większa od liczby permutacji zbioru $(n - 2)$ -elementowego. Oblicz n .

Zadanie 3. Ile można utworzyć funkcji ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4\}$ w zbiór $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$:

- a) dowolnych? b) różnowartościowych?

Zadanie 4. Zbiór n -elementowy posiada 90 dwuwyrazowych wariacji bez powtórzeń. Ile elementów ma ten zbiór?

Zadanie 5. Do pustego przedziału, w którym są 2 rzędy ławek po 4 miejsca, wchodzi losowo 4 osoby, wśród nich *pan X*. Na ile sposobów mogą zająć miejsca:

- a) tak aby *pan X* siedział przy oknie?
- b) tak aby w 1 rzędzie siedziały 2 osoby, a naprzeciw nich pozostałe osoby?

Zadanie 6. Na okręgu wybrano 10 różnych punktów. Ile różnych trójkątów można zbudować z tych punktów?

Zadanie 7. W klasie jest 6 dziewczyn i 15 chłopaków. Z klasy wybieramy czteroosobową delegację. Na ile sposobów można to zrobić:

- a) dowolnie? c) tak aby w delegacji był co najmniej 1 chłopiec?
- b) tak aby w delegacji było dokładnie 2 chłopców? d) tak aby w delegacji był co najwyżej 1 chłopiec?

Zadanie 8. Klasę, która składa się z 21 uczniów, dzielimy na 3 równoliczne grupy. Na ile sposobów można to uczynić?

Zadanie 9. Ile jest wszystkich liczb dziesięciocyfrowych, które nie zawierają cyfry 0, zawierają dokładnie 3 cyfry równe 1 i dwie cyfry równe 2?

Zadanie 10. Ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, w których cyfra 5 występuje 4 razy, a każda z pozostałych jest różna?

Zadanie 11. Ile jest wszystkich liczb trzydziestocyfrowych, których suma cyfr wynosi 4?

Zadanie 12. Ile jest wszystkich liczb piętnastocyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 18?

Zadanie 13. Ile jest wszystkich numerów telefonów komórkowych, które spełniają jednocześnie wszystkie warunki: (1) na 1 i 3 miejscu występuje cyfra 6; (2) ostatnia cyfra to 5 lub 9; (3) cyfra 4 występuje dokładnie 3 razy?

Zadanie 14. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2k + 3\}$, $k \in \mathbb{N}$, wybieramy jednocześnie 2 liczby. Na ile sposobów różnica wylosowanych liczb będzie parzysta?

Zadanie 15. Ile jest wszystkich funkcji malejących, odwzorowujących zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ w zbiór $B = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$, takich, że dla argumentu 5 funkcja przyjmuje wartość 10?

Zadanie 16. Ile jest nieparzystych liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których co najmniej jedna cyfra jest dziewiątka?

Zadanie 17. Rzucamy 12 razy kostką. Na ile sposobów:

- a) 3 oczka wypadną dokładnie 4 razy, a 5 oczek – 2 razy?
- b) 4 oczka wypadną dokładnie 3 razy i w pierwszych dwóch rzutach wypadnie ta sama liczba oczek?

Zadanie 18. 8 osób wchodzi losowo do 5 pustych pokoi. Na ile sposobów do ostatniego pokoju wejdą 3 osoby, a z pozostałych 4 pokoi dokładnie 2 pozostaną puste?

Zadanie 19. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2018\}$ losujemy kolejno bez zwracania 3 liczby: a, b, c i tworzymy sumę $a^2 + b^2 + c^2$. Na ile sposobów taka suma jest podzielna przez 3?

Zadanie 20. Do pustego pociągu złożonego z 8 wagonów wsiada losowo 7 osób. Na ile sposobów:

- a) do pierwszego wagonu wsiadą 2 osoby, a do drugiego – 1?
- b) dokładnie 6 wagonów pozostanie nadal pustych?
- c) dokładnie 1 wagon pozostanie pusty?

II. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zadanie 1. W loterii są 2 losy z wygraną 10 000 zł, 5 losów z wygraną 5 000 zł i 43 losy puste. Wybieramy jednocześnie 4 losy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: A – wygrania dokładnie 20 000 zł, B – wygrania jakiegokolwiek kwoty.

Zadanie 2. W grupie jest 10 mężczyzn i 5 kobiet. Losujemy z grupy 4 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że stosunek liczby mężczyzn do liczby kobiet, które pozostaną w grupie, ulegnie zwiększeniu.

Zadanie 3. W urnie jest n kul białych i $2n$ czarnych. Losujemy 2 kule. Jakie musi być n , aby prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych było równe prawdopodobieństwu wylosowania kul w tym samym kolorze?

Zadanie 4. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \geq 4$, losujemy kolejno 2 liczby bez zwracania i od pierwszej odejmujemy drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A – różnica wylosowania liczb jest większe od 2?

Zadanie 5. Rzucamy 3 razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma kwadratów wyrzuconych oczek nie jest podzielna przez 3.

Zadanie 6. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ wybieramy losowo bez zwracania 2 razy po 1 liczbie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.

Zadanie 7. Z pojemnika, w którym jest n kul białych, $2n$ zielonych i $3n$ czerwonych, losujemy jednocześnie 3 kule. Prawdopodobieństwo otrzymania kul różnokolorowych wynosi 0,3. Ile jest kul w pojemniku?

Zadanie 8. Spośród wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego $a_n = 5n + 8$ wybieramy losowo 3 liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 3.

Zadanie 9. Danych jest 8 kul z numerami od 1 do 8 i 10 szuflad z numerami od 1 do 10. Rozmieszczamy w dowolny sposób kule w szufladach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

- A – wszystkie kule znajdują się w szufladach o numerach parzystych
- B – dokładnie 2 szuflady pozostaną puste
- C – do 5 szuflad wpadną dokładnie 3 kule

Zadanie 10. W pudełku znajduje się 10 par rękawiczek. Wybieramy losowo 4 razy po 1 rękawicze. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: A – wśród wylosowanych rękawiczek nie będzie pary, B – wśród wylosowanych rękawiczek będzie dokładnie 1 para.

Zadanie 11. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n + 5\}$, $n \in \mathbb{N}$, losujemy jednocześnie 2 liczby. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest parzysta, jest nie większe od $\frac{5}{11}$?

Zadanie 12. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$ losujemy jednocześnie 4 liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – wśród wybranych jest dokładnie 1 para liczb o sumie równej 14.

Zadanie 13. W urnie jest 15 kartek ponumerowanych od 1 do 15. Wyciągamy kolejno bez zwracania 5 kartek. Oblicz prawdopodobieństwo, że numer 3 kartki jest podzielny przez 3 i jednocześnie numer 5 kartki jest podzielny przez 5. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 14. (MATURA 2017) W urnie jest 8 piłek ponumerowanych od 1 do 8. Losujemy kolejno ze zwracaniem 3 piłki. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb wylosowanych piłek będzie liczbą podzielną przez 4.

Zadanie 15. Z liczb $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że żadne 2 liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu.

III. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Zadanie 1. $A \subset \Omega, B \subset \Omega, P(A') = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

Oblicz: $P(B), P(A \cap B'), P(B \setminus A), P(A' \cap B')$.

Zadanie 2. $A \subset \Omega, B \subset \Omega, P(A') = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}, P(B') = \frac{1}{2}$.

Oblicz: $P(A \cap B), P(A \cap B'), P(B \setminus A)$.

Zadanie 3. $A \subset \Omega, B \subset \Omega, P(A \setminus B) = P(B \setminus A), P(A \cup B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Oblicz: $P(B), P(A' \cap B), P(A' \cap B')$.

Zadanie 4. $A \subset \Omega, B \subset \Omega, P(A' \cap B') = \frac{1}{2}, P(A') = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Oblicz: $P(B), P(A' \cap B)$.

Zadanie 5. $A \subset \Omega, B \subset \Omega, P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{4}, A \cap B = \emptyset$.

Oblicz: $P(A \cup B), P(A' \cup B), P(A \cup B')$.

Zadanie 6. Wiadomo, że $P(A) = 0,85, P(B) = 0,75$. Wykaż, że $P(A \cap B) \geq 0,8P(B)$.

Zadanie 7. Wiadomo, że $P(A \cap B') = 0,7$. Wykaż, że $P(A \cap B') \leq 0,3$.

Zadanie 8. Wiadomo, że $P(A) = 0,9, P(B) = 0,7$. Wykaż, że $P(A \cap B') \leq 0,3$.

Zadanie 9. Wiadomo, że $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), P(A' \cup B') = 0,6, 4P(B') \cdot [P(B) - 2] = -3$. Oblicz $P(A)$ i $P(B \setminus A)$.

Zadanie 10. Wiadomo, że $P(A) = 3a, P(B') = a$ i $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, gdzie $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Oblicz najmniejszą wartość wyrażenia $P(A \cup B)$.

Zadanie 11. Wiadomo, że $P(A) > P(A'), P(A) \cdot P(A') = \frac{2}{9}, P(A \setminus B) = \frac{1}{6}$ i $A \cup B$ – zdarzenie pewne. Oblicz $P(A), P(A \cap B), P(B \setminus A), P(A' \cap B')$.

Zadanie 12. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, to $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$.

IV. Prawdopodobieństwo warunkowe

Zadanie 1. Janek przeprowadza doświadczenie, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prawdopodobieństwo p_k otrzymania liczby k jest dane wzorem $p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}$. Niech A – zdarzenie, że otrzymano liczbę ze zbioru $\{1, 3, 5\}$, B – zdarzenie, że otrzymano liczbę ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo $P(A|B)$.

Zadanie 2. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie kostką sześcienną otrzymamy co najmniej jedną „jedynekę” pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

Zadanie 3. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$ losujemy jednocześnie 2 liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych będzie liczba 8 pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Zadanie 4. Niech $A \subset \Omega, B \subset \Omega, P(A) = 0,7, P(B) = 0,8$. Wykaż, że $P(A|B) \geq 0,625$.

Zadanie 5. Ze wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej, jeżeli wiadomo, że suma cyfr tej liczby wynosi 3.

Zadanie 6. W pojemniku są 4 kule białe i 6 czarnych. Losujemy kolejno bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie 2 kul białych pod warunkiem, że pierwsza z wylosowanych kul była biała.

Zadanie 7. Na parterze dziesięciopiętrowego budynku wsiadają do windy pan i pani. Oblicz prawdopodobieństwo, że pan wysiądzie na piętrze wyższym niż pani, jeżeli wiadomo, że pani wysiadła na piętrze o numerze parzystym.

Zadanie 8. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem 3 razy po 1 liczbie. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta, jeżeli pierwsza z wylosowanych liczb była podzielna przez 3.

Zadanie 9. Rzucamy 10 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki dokładnie 6 razy pod warunkiem, że w pierwszych 4 rzutach reszka wypadła dokładnie 2 razy.

Zadanie 10. Rzucamy 6 razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwa oczka wypadły dokładnie 4 razy, jeżeli w pierwszych trzech rzutach wypadła ta sama liczba oczek.

V. Prawdopodobieństwo całkowite

Zadanie 1. W I grupie jest 5 kobiet i 10 mężczyzn, a w II grupie – 3 kobiety i 2 mężczyzn. Rzucamy 3 razy monetą i, jeżeli w każdym rzucie wypadnie ta sama strona monety, to losujemy 2 osoby z I grupy, a w pozostałych przypadkach losujemy 1 osobę z II grupy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy dokładnie 1 kobietę.

Zadanie 2. W pudełku są 3 kule białe, 2 czarne i 5 niebieskich. Losowo usuwamy 1 kulę z pudełka, a z pozostałych wybieramy losowo 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule będą w tym samym kolorze.

Zadanie 3. Mamy 3 zestawy po 20 pytań. Uczeń zna odpowiedzi: 80% z I zestawu, 60% z II zestawu i 50% z III zestawu. Uczeń losuje 1 zestaw, a następnie z niego 2 pytania. Oblicz prawdopodobieństwo, że udzieli chociaż 1 poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 4. W I urnie są 3 kule białe i 5 czarnych, a w II – 7 białych i 2 czarne. Losujemy jedną kulę z I urny, przekładamy ją do drugiej i dokładamy jeszcze 2 takie same, jak wylosowana. Następnie losujemy 2 kule z 2 urny. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule z 2 urny będą białe.

Zadanie 5. W każdej z 3 grup znajdują się 2 dziewczyny i 3 chłopców. Losowo wybrana osoba z I grupy przechodzi do II grupy, następnie losowo wybrana osoba z II grupy przechodzi do III grupy, a następnie z III grupy losujemy dwie osoby. Oblicz prawdopodobieństwo, że będą to 2 dziewczyny.

Zadanie 6. Hurtownia sprzedaje buty od 3 producentów, którzy je do niej dostarczają w stosunku 2 : 3 : 5. Wiadomo, że buty reklamowane (wadliwe) od poszczególnych producentów to odpowiednio 5%, 8% i 10%. Z hurtowni wybraliśmy 1 parę butów. Oblicz prawdopodobieństwo, że będą dobre (niewadliwe).

Zadanie 7. W klasie jest 10 chłopców i 20 dziewczyn. Rzucamy 3 razy monetą, a następnie losujemy z klasy tyle osób, ile razy wypadnie orzeł w tych rzutach. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych osób będzie dokładnie 1 chłopak.

Zadanie 8. Średnio co 10 mężczyzna i co 50 kobieta jest daltonistą. Z grupy, w której jest 3 razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo 1 osobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba ta była daltonistą.

Zadanie 9. Znając prawdopodobieństwo zdarzeń $P(A) = 0,9$, $P(B|A') = 0,75$, $P(B|A) = 0,95$, oblicz $P(B)$.

Zadanie 10. W I pudełku jest 5 kul białych i 2 czarne, a w II pudełku – 3 białe i 2 czarne. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie kul w różnych kolorach, gdy z każdego pojemnika losujemy po 1 kuli, czy dwóch kul różnokolorowych, gdy losujemy 2 kule z losowo wybranego pojemnika?