

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI**GZI**

1. Rozwiż równania i nierówności

a) $8x^3 + 12x^2 - 10x - 15 = 0$

b) $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 6 = 0$

c) $x^4 - 2x^3 + 8x - 16 = 0$

d) $6x^3 - 5x^2 - 8x + 3 = 0$

e) $36x^3 + 12x^2 - 5x - 1 = 0$

f) $(4-x^2)(2x^3-4x^2) \leq 0$

g) $(9x^2-6x+1)(x^2-5x) > 0$

h) $6x^3 - 17x^2 + 14x - 3 > 0$

i) $\frac{2}{x-3} + \frac{4x}{x+2} = \frac{1}{3}$

j) $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x-2}{x^2+x-2}$

k) $\frac{5x-4}{3x-2} \leq 2$

l) $\frac{3}{2x+2} \geq \frac{1}{x} - 1$

m) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{2}{1-x} < \frac{8}{x^2-4x+3}$

n) $|6-2x| + |x+7| \geq 17$

o) $\sqrt{x^2+4x+4} \geq 11 - \sqrt{x^2-6x+9}$

p) $|1-2x|-6 \leq 2$

q) $|x^2-3x+2| \geq |x-1|$

r) $\left| \frac{2x-1}{x-3} \right| \leq 2$

s) $1 - \sqrt{4x^2-12x+9} \leq 0$

2. Jeżeli k oznacza liczbę rozw. równanie $|x|-2=|x|+2$ to A. k=0 B. k=1 C. k=2 D. k=43. Dane jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{dla } x \leq 0 \\ |x+3|-4 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$. Liczba rozw. równania $f(x)=1$ wynosi:
A. 1 B. 2 C. 4 D. 54. Dla jakich wartości k równanie $||x-1|-2|=k$ ma 4 rozwiązania5. Dla jakich wartości a równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ ma 2 różne rozw. dodatnie6. Oblicz iloczyn wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówność
 $-x^3 + 11x^2 - 15x - 27 > 0$ 7. Punkt P(x,y) jest punktem przecięcia wykreśłów funkcji $f(x) = 2x+5$ i $g(x) = (m+3)x-1$.
Dla jakich wartości m współrzędne punktu P mają pewne znaki8. Dla jakich wartości m równanie $m^2x+5 = 9mx+8x+5m$ ma nieskończenie wiele rozw.9. Wykazać, że równanie $x^8+x^2 = 2(x^4+x-1)$ ma dokładnie 1 rozw. Wyznaczyć to rozwiązanie10. Określić liczbę rozwiązań równania $(k^2-6k+5)x^2 + 2(k-5)x + 1 = 0$ w zależności od parametru k11. Dla jakich wartości m rozwiązaniem nierówności $(4m^2)x^2 + (m+2)x - 1 < 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych12. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{2-x}{x^3-3x+2} - \sqrt{x-x^3}$ 13. Równanie $15x^5 - 133x^4 + 383x^3 - 499x^2 + 146x + 120 = 0$ ma w zbiorze $\left\{\frac{2}{6}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{9}{5}\right\}$ dokładnie 1 rozwiązanie. Jest nim liczba
A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{8}{7}$ D. $\frac{9}{5}$ 14. Wykazać, że równanie $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych

1. Liczba $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$ jest równa. A. 1 B. (-1) C. $3-2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}+1$
2. Liczba $(1-\sqrt{2})^3$ jest równa. A. $7-5\sqrt{2}$ B. $7-\sqrt{2}$ C. $1-2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}-5$
3. Wiedząc, że $x = \sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{43-24\sqrt{3}}$ oblicz x^4
4. Wykazać, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest całkowita
5. W rozwinięciu $(2\sqrt{3}x+4y)^3$ współczynnik przy iloczynie xy^2 wynosi
A. $32\sqrt{3}$ B. 48 C. $96\sqrt{3}$ D. 144
6. Wiedząc, że $a+b=3$, $ab=-26$ oblicz a^3+b^3
7. Jeżeli x_1, x_2 są rozwiązaniami równania $x^2-2x-5=0$ to wartość wyrażenia $x_1^4+x_2^4$ wynosi A. 196 B. 146 C. 96 D. 16
8. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność
$$x^4-5x^2+2x+10 \geq 0$$
9. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej n wyrażenie n^5-3n^4-n+19 jest podzielne przez 16
10. Wykazać, że jeżeli $x+y+z=1$ to $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$
11. Wykazać, że jeżeli $x \neq y$ to $4x^2y^2+3x^2+3y^2-10xy+1 > 0$
12. Wykazać, że jeżeli $n \in \mathbb{C}$ to n^3+3n^2-n-3 jest podzielne przez 3
13. Wykazać, że jeżeli $2a+b \geq 0$ to $2a^3+b^3 \geq 3a^2b$
14. Wykazać, że jeżeli $a > b \geq 1$ to $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$
15. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczba $3k^4+6k^3+3k^2$ jest podzielna przez 12
16. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $8a^3-2ab^2 \geq 4a^2b-b^3$
17. Wykazać, że jeżeli $k \in \mathbb{C}$ i $m \in \mathbb{C}$ to liczba k^3m-km^3 jest podzielna przez 6
18. Wykazać, że jeżeli $a \neq b$ i $a \neq c$ i $b \neq c$ i $a+b=2c$ to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$
19. Wykazać, że jeżeli $a > 0$, $x > 0$, $y > 0$ i $x < y$ to $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$
20. Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2+2a=4b^2+4b$
Wykazać, że $a=2b$

1. Jeżeli $2^a = 3$, $3^b = 5$, $5^c = 4$ to iloczyn abc wynosi
A. $\log_4 5$ B. $\log_5 4$ C. 4 D. 2
2. Wiedząc, że $\log_{21} 7 = k$ oblicz $\log_7 27$
3. Oblicz $2 \log_3 5 - 5 \log_3 2$
4. Wiedząc, że $a = \log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_5 27$, $b = \log_5 3 - \log_5 \sqrt[3]{3}$. Wykaż, że $\frac{b}{a} = \frac{16}{9}$
5. Wartość wyrażenia $\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16$ jest równa: A. $\frac{11}{3}$ B. $\frac{9}{2}$ C. 8 D. 12
6. Oblicz $\log_2 12 \cdot \log_2 \frac{4}{3} + (\log_2 3)^2$
7. Wiadomo, że $\log 2 = a$, $\log 3 = b$. Zatem $\log_8 90$ jest równy
A. $\frac{a+1}{2b}$ B. $\frac{2a+1}{3b}$ C. $\frac{2b+1}{3a}$ D. $\frac{2a+1}{b}$
8. Jeżeli $x > 0$ i $x \neq 1$ i $y > 0$ i $y \neq 1$ to wartość wyrażenia $(\log_{\frac{1}{x}} y) \cdot (\log_{\frac{1}{y}} x)$ jest równa. A. xy B. $\frac{1}{xy}$ C. (-1) D. (1)
9. Wartość wyrażenia $\log_4 25 + \log_2 10$ wynosi
A. $\log_2 15$ B. $\log_2 50$ C. $\log_2 210$ D. $\log_2 635$
10. Wartość wyrażenia $2 \log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5}$ wynosi
A. (-1) B. 0 C. 1 D. 2
11. Niech $a = \log_{12} 2$ Wykaż, że $\log_8 64 = \frac{6a}{1-a}$
12. Dodatnie liczby a i b , takie, że $a > b$ spełniający warunek
 $\log_2 \left(\frac{a-b}{3} \right) = \frac{1}{2} (\log_2 a + \log_2 b)$. Wykaż, że prawdziwa jest
równość $a^2 + b^2 = 11ab$
13. Wykaż, że jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$ i $b > 0$ i $b \neq 1$ to prawdziwa
jest równość
$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \dots + \frac{1}{\log_{a^9} b} + \frac{1}{\log_{a^{10}} b} = \frac{55}{\log_a b}$$
14. Dla jakich wartości x podane wyrażenie ma sens
liczbowy $\log_{(9-x^2)} (-x^3 + x^2 + 5x + 3)$

Wykonanie wzorów Viète'a w równaniach kwadratowych z parametrem.

C21V

1. Liczby $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ i $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ są pierwiastkami trójmianu $f(x) = x^2 - (3k - 2m^2)x + (k - m)$ Oblicz k i m
2. Dla jakich wartości m równanie $x^2 + (m+1)x + 1 - m^2 = 0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$
3. Dla jakich wartości $m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$ ma 2 różne rozwiązania, takie, że każde należy do przedziału $(-\infty; 3)$
4. Wyznacz wszystkie całkowite wartości k , dla których trójmian $y = \frac{k^2 + 9k + 14}{k - 1} x^2 + (k + 2)x + (k - 1)$ przyjmuje wartość największą i ma 2 różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.
5. Dla jakich wartości m równanie $mx^2 - (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ ma 2 różne rozwiązania $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$ takie, że $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 0$
6. Dla jakich wartości m równanie $-x^2 + (m - 2)x + 2m^2 - 4m = 0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $(2x_1 - 2x_2 - 3)(2x_1 - 2x_2 + 3) < 7 - 4m^2$
7. Dla jakich wartości m równanie $-2x^2 + 3(m - 2)x + 4 - m^2 = 0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 \geq 0$
8. Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = 4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$ ma 2 różne dodatnie miejsca zerowe, których suma kwadratów jest mniejsza od $\frac{17}{4}$
9. Dla jakich wartości m równanie $x^2 + 2(m+1)x + 6m+1 = 0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 3$
10. Dla jakich wartości m równanie $x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 takie, że $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$
11. Dany jest trójmian $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x + 4 - m$ Wyznacz wszystkie wartości m , dla których trójmian ma 2 różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$
12. Dla jakich wartości k funkcja $f(x) = (k-2)x^2 + 2(1-k)x + k-2$ ma 2 miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 < 2 < x_2$

WIELOMIANY,

CZ V

1. Liczba $\frac{2}{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 5x^3 - 7x^2 - 3x + p$. Wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu.
2. Wielomian $W(x) = 6x^3 + (m+4)x^2 - 2x - 1$ przy dzieleniu przez $(x-m)$ daje resztę 8. Rozwiż nierówność $W(x) \geq 0$
3. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Wiecząc, że liczby $p, 2p, p-2$ są pierwiastkami tego wielomianu oblicz a, b, c (rozważ wszystkie przypadki)
4. Wielomian $W(x) = 2x^3 + kx^2 - 3x + m$ jest podzielny przez $(x-2)$, a przy dzieleniu przez $(x+3)$ daje resztę (-7) . Rozwiż nierówność $W(x) > 0$
5. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(2x-1)$ daje iloraz $(x^3 - x + 1)$ i resztę 5. Rozwiż nierówność $W(x) \geq x^2 + 3x + 4$
6. Wielomian $W(x) = x^3 - 2kx^2 + (5k+1)x - 6(k-1)$ jest podzielny przez $(x-2)$. Rozwiż nierówność $W(x) \leq 0$
7. Wyznacz wszystkie wartości k , takie, że wielomian $W(x) = x^3 + (2k-1)x^2 + (5-2k)x - 5$ ma 3 różne pierwiastki, których suma jest mniejsza od 13.
8. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 - 3mx^2 + (3m^2-1)x - 9m^2 + 20m + 4$ jeżeli wykres funkcji $f(x) = W(x+3)$ przecinał przez punktów układu współrzędnych
9. Dla jakich wartości k suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (2-x)^{2021} + (k^3 + 3k^2)x^3 - 2(k^2 + 2k)x - k$ jest równa (-2)
10. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{9x - x^3} + \frac{3}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$
11. Liczby $-p, 2p, 4p$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 3x^3 - 30x^2 + kx + m$. Wyznacz te pierwiastki
12. Wielomian $W(x) = 2x^3 + (m^3+2)x^2 - 11x - 2(2m+1)$ jest podzielny przez $(x-2)$, a przy dzieleniu przez $(x+1)$ daje resztę 6. Oblicz m a następnie rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$
13. Pierwiastkami wielomianu $W(x) = -2x^3 + ax^2 + b$ są liczby 1 i p . Oblicz a i b jeżeli p jest pierwiastkiem podwójnym.
14. Liczba 1 jest jedynym całkowitym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = mx^3 + x^2 + (m^2-9)x + m$. Oblicz m
15. Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m , dla których równanie $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)(x^2 - (2m+1)x + m^2 + m) = 0$ ma 3 różne pierwiastki rzeczywiste, takie, że jeden z nich jest średnią arytmetyczną 2 pozostałych.