

## Geometria analityczna

1. W trójkącie  $ABC$  dane są  $A = (-4, -1)$ , środek  $S = (2, 1)$  boku  $AB$  i wektor  $\overrightarrow{BC} = [-4, 4]$ .
  - (a) Wyznacz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $C$  i oblicz pole trójkąta.
  - (b) Wyznacz współrzędne  $C'$  symetrycznego do punktu  $C$  względem prostej  $AB$ .
2. W kwadracie  $ABCD$  dany jest wierzchołek  $A = (1, 0)$  i wektor  $\overrightarrow{AC} = [4, 2]$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.
3. Dane są wierzchołki  $A = (-4, 4)$ ,  $B = (4, 0)$  trójkąta  $ABC$  oraz punkt  $H = (3, 4)$  przecięcia wysokości. Wyznacz współrzędne wierzchołka  $C$ .
4. Punkty  $A = (-2, 12)$ ,  $B = (6, -2)$  są wierzchołkami trójkąta prostokątnego  $ABC$  o kącie prostym przy wierzchołku  $C$ . Oblicz współrzędne punktu  $C$ , jeżeli leży on na prostej  $x + 3y = 22$ .
5. Pole trójkąta  $ABC$ , w którym  $A = (1, -2)$ ,  $B = (2, 3)$  jest równe 8. Znajdź trzeci wierzchołek, jeżeli leży on na prostej  $2x + y - 2 = 0$ .
6. Dane są równania dwóch środkowych trójkąta:  $4x + 5y = 0$  i  $x - 3y = 0$  oraz wierzchołek  $a = (2, -5)$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.
7. Wektor  $\overrightarrow{AB} = [6, 4]$  jest podstawą trójkąta równoramiennego o wierzchołku  $C = (2, 3)$  i wektorze wysokości  $\overrightarrow{CD} = [-2, 3]$ . Znajdź równania prostych zawierających boki tego trójkąta.
8. Znajdź równania prostych zawierających boki trójkąta, znając jeden wierzchołek  $A = (3, -4)$  i równania prostych zawierających 2 wysokości:  $7x - 2y - 1 = 0$  i  $2x - 7y - 6 = 0$ .
9. W trójkącie  $ABC$  dane są prosta  $AB$ :  $5x - 3y + 2 = 0$  oraz proste zawierające wysokości:  $AM$ :  $4x - 3y + 1 = 0$ ,  $BN$ :  $7x + 2y - 22 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
10. Napisz równanie okręgu o środku  $S = (10, -3)$  stycznego do prostej  $y = -\frac{3}{4}x + 2$ .
11. Okrąg jest styczny do prostej  $y = 2x - 3$  w punkcie  $A = (2, 1)$  i styczny do prostej  $y = \frac{1}{2}x + 9$  w punkcie  $B = (-4, 7)$ . Oblicz promień tego okręgu.
12. Wierzchołki trójkąta równobocznego  $ABC$  są punktami paraboli  $y = -x^2 + 6x$ . Punkt  $C$  jest jej wierzchołkiem, a bok  $AB$  jest równoległy do osi  $OX$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
13. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $P = (2, 6)$ , tworzącej z dodatnimi półosiąmi współrzędnych trójkąt o polu 24.
14. Prosta  $l$  przechodzi przez początek układu współrzędnych, a jej odległość od punktu  $A = (-3, -4)$  jest równa 3. Wyznacz równanie tej prostej.
15. Punkty równo odległe od prostej  $y = -\frac{1}{2}$  i punktu  $P = (0, \frac{1}{2})$  należą do wykresu funkcji  $f$ . Znajdź wzór tej funkcji.
16. Dany jest okrąg o środku  $S = (2, 1)$  i promieniu równym  $\sqrt{17}$ . Punkty  $A$  i  $B$  są punktami przecięcia okręgu z osią  $OX$ . Punkt  $C$  leży na prostej  $3x - y + 3 = 0$ , a pole trójkąta  $ABC$  równe jest 24. Oblicz współrzędne punktu  $C$ .
17. Jeden z końców odcinka leży na paraboli  $y = x^2$ , a drugi na prostej  $y = 2x - 6$ . Wykaż, że długość tego odcinka jest mniejsza od  $\sqrt{5}$ . Sporządź odpowiedni rysunek.
18. Punkt  $A = (-2, 5)$  jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego  $ABC$  i  $|AC| = |BC|$ . Pole trójkąta  $ABC$  równe jest 15, a bok  $BC$  jest zawarty w prostej  $y = x + 1$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ .
19. Punkty  $A = (-5, 5)$ ,  $C = (8, 6)$  są przeciwległymi wierzchołkami trapezu równoramiennego  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$ . Prosta  $y = 2x$  jest osią symetrii tego trapezu. Oblicz współrzędne  $B$  i  $D$ , a także pole tego trapezu.
20. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt  $A = (7, 9)$  i stycznego do osi  $OX$  w punkcie  $B = (4, 0)$ .
21. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt  $A = (-4, 2)$  i stycznego do obu osi układu współrzędnych.
22. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , jeżeli  $A = (1, 5)$ ,  $B = (8, -2)$ ,  $C = (9, 1)$ .

23. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty  $A = (6, 4)$ ,  $B = (-1, 3)$ , jeżeli środek okręgu leży na prostej  $x - 2y - 3 = 0$ .
24. Punkty przecięcia paraboli  $y = x^2 - 2x - 8$  z prostą  $2x + y - 1 = 0$  są końcami przekątnej rombu o polu 30. Oblicz współrzędne wierzchołków rombu.
25. Dane są zbiory punktów określone nierównościami:  $A: x^2 - 6x + y^2 + 12y \leq 4$ ,  $B: 3x + y - 3 \geq 0$ . Narysuj figurę  $F = A \cap B$  i oblicz jej pole.
26. W trójkąt równoboczny  $ABC$  wpisano okrąg o środku  $S = (3, -1)$ . Wiedząc, że  $C = (1, -3)$  wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta.
27. Napisz równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  przechodzących przez punkt  $P = (0, 0)$ .
28. Napisz równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$  przechodzących przez punkt  $A = (-4, 3)$ .
29. Napisz równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$  równoległych do prostej  $x + y - 4 = 0$ .
30. Napisz równania stycznych do okręgu  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$  prostopadłych do prostej  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ .
31. Zbadaj, w zależności od parametru  $m$ , ilość punktów wspólnych prostej  $y = x + m$  z okręgiem  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$ .
32. Wyznacz równania stycznych do okręgu  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$  przechodzących przez punkt  $A = (0, -)$ .
33. Punkt  $A = (6, 3)$  jest wierzchołkiem kwadratu wpisanego w okrąg  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.
34. Napisz równanie okręgu o środku  $S = (1, 1)$ , który na prostej o równaniu  $x - y + 4 = 0$  odcina cięciwę  $AB$  o długości  $2\sqrt{2}$ .
35. Dane są trzy punkty:  $A = (6, -2)$ ,  $B = (0, 4)$ ,  $C = (-8, -4)$ . Wyznacz współrzędne takiego punktu  $D$  należącego do prostej  $y = -8$ , aby na czworokącie  $ABCD$  można było opisać okrąg.
36. Okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach  $A = (0, 2)$  i  $B = (2, 0)$  oraz jest styczny do prostej  $l$  w punkcie  $C = (1, a)$ , gdzie  $a > 1$ . Wyznacz równanie prostej  $l$ .
37. Prosta  $3x - 4y - 36 = 0$  przecina okrąg o środku  $S = (3, 12)$  w punktach  $A$  i  $B$ , gdzie  $|AB| = 40$ . Wyznacz równanie tego okręgu.
38. Punkty  $A = (2, 0)$  i  $B = (4, 2)$  leżą na okręgu  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ . Wyznacz na tym okręgu taki punkt  $C$ , aby trójkąt  $ABC$  był równoramienny o podstawie  $AB$ .
39. Dla jakich wartości  $m$  okręgi:  $(x - m)^2 + (y + 1)^2 = 8$  i  $(x + 1)^2 + (y - m)^2 = 2$  są zewnętrznie styczne?
40. Dla jakich wartości  $m$  okręgi:  $(x + 5)^2 + (y + m)^2 = 16$  i  $(x - 2m)^2 + (y + m)^2 = 9$  przecinają się w 2 punktach?
41. Określ wzajemne położenie okręgów danych równaniami:  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 8$  i  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ .
42. Okręgi:  $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$  i  $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 60 = 0$  są symetryczne względem prostej  $l$ . Wyznacz równanie tej prostej.
43. Punkty  $A = (0, -1)$  i  $B = (-2, 1)$  należą do okręgu o środku  $S = (1, 2)$  i promieniu  $r = \sqrt{10}$ . Wyznacz współrzędne takiego punktu  $C$  należącego do okręgu, aby trójkąt  $ABC$  był równoramienny i  $|AC| = |BC|$ .
44. W kwadracie  $ABCD$  dane są współrzędne punktu  $A = (4, 1)$ , a jedna z przekątnych jest zawarta w prostej  $y = 4x + 2$ . Wyznacz równanie okręgu wpisanego w ten kwadrat.
45. Wykaż, że jeżeli okrąg  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  jest symetryczny do osi  $OX$ , to  $C = \frac{1}{4}a^2$ .
46. Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$  poprowadzonymi przez punkt  $A = (2, 0)$ .
47. Dany jest okrąg o środku  $S = (3, -4)$  i promieniu  $r = 5$ . Okrąg ten przekształcono przez jednokładność o środku  $O = (2, -1)$  i skali  $k = -3$ . Wyznacz równanie okręgu po tym przekształceniu.