

OGÓLNE WŁASNOŚCI CIĄGÓW

(1)

1. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^n(n+1)$
Oblicz $2a_5 - 3a_4$
2. Ile ujemnych wyrazów ma ciąg (a_n) określony wzorem
 $a_n = n^2 - 20n - 21$
3. Którym wyrazem ciągu (a_n) określonego wzorem
 $a_n = \frac{5n-8}{n-1}$ jest liczba 2
4. Oblicz 5 wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$$
5. Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2n^2 + n$ jest rosnący.
6. Oblicz sumę 4 początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego
wzorem rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = na_n + 4 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$
7. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_{n+1} = a_n + n - 6$
Wiadomo, że $a_3 = -1$. Oblicz a_1
- R. 8. Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{5-n}{2n+1}$
jest malejący. Ile wyrazów tego ciągu jest większych od $(-\frac{1}{4})$
- R. 9. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n - k \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$
 Wiadomo, że $a_4 = 17$. Oblicz k .
- R. 10. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się
wzorem $S_n = 2n^2 - 5n + 7$. Oblicz $a_5 - a_3$
- R. 11. Dla jakich wartości k ciąg $^{(an)}$ określony wzorem
 $a_n = \frac{2n+k}{n+1}$ jest rosnący.

CIĄG ARYTMETYCZNY

(2)

- Wykazać, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{3-2n}{5}$ jest arytmetyczny
- Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = 3n - 1$
 - oblicz różnicę ciągu
 - oblicz sumę 25 początkowych wyrazów ciągu
 - oblicz najmniejszą wartość n dla której $a_n > 25$
- W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_2 = 5$, $a_{15} = 47$. Wyznacz wzór na n -ty wyraz tego ciągu
- Wzory $(2x+5, 5x-1, x+10)$ są 3 początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Oblicz sumę 20 początkowych wyrazów ciągu
- W ciągu arytmetycznym (a_n) $a_{15} - a_9 = 24$, a suma 10 początkowych wyrazów ciągu wynosi 160. Oblicz a_k jeżeli $a_k = 102$
- Oblicz sumę narystków liczb 3-cyfrowych, które są mniejsze od 350 i przy dzieleniu przez 7 dają resztę 5.
- Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + 11n$. Podaj wzór na n -ty wyraz tego ciągu.
- Rozwiąż równanie $1 + 5 + 9 + \dots + x = 780$
- W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_6 = 3$, $a_{20} - a_8 = 24$. Suma kilku kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 1280
- Ciąg arytmetyczny (a_n) składa się ze 100 wyrazów. Suma wyrazów o numerach nieparzystych wynosi 7300, a suma wyrazów o numerach parzystych 7500
 - oblicz a_8
 - które wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek $(a_n)^2 < 36$
- W ciągu arytmetycznym (a_n) $a_1 + a_3 = 10$. Gdy podzielimy wyraz a_{10} przez a_5 otrzymamy iloraz 2 i resztę 1. Oblicz sumę tego ciągu od wyrazu a_{20} do a_{70} włącznie
- O liczbach a, b, c wiadomo, że ich suma wynosi 12 i tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Oblicz największą wartość wyrażenia $ab + bc + ac$

1. Wykazać, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{1-2n}$ jest geometryczny
2. Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie i $9a_5 = 4a_3$. Oblicz iloraz tego ciągu.
3. Ciąg $(x, 3x+2, 9x+16)$ jest geometryczny. Oblicz x
4. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_5 = \frac{2}{3}$, $a_8 = 18$. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu
5. Suma 5 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q = (-2)$ wynosi 16,5. Oblicz a_3
6. Liczby $(\frac{5}{2}, x, y, \frac{20}{27})$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz $x+y$
7. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_3 = 24$, $a_5 = 96$ i $q < 0$. Oblicz sumę 6 początkowych wyrazów ciągu.
- R 8. Suma 3 liczb tworzących ciąg geometryczny wynosi 21, a ich iloczyn 216. Co to za liczby
- R 9. Wyznaczyć wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że $a_5 - a_3 = 1680$, $a_3 + a_4 = 560$
- R 10. Ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny w którym $a+d = -21$, $b+c = 6$. Co to za liczby
- R 11. W pewnym ciągu geometrycznym (a_n) prawdziwe są równości $a_1 + a_5 = 17$, $a_2 + a_6 = -34$. Ile wyrazów początkowych tego ciągu należy dodać, aby suma była równa 43.
- R 12. Ile liczb należy wstawić pomiędzy 64 i $\frac{1}{4}$, aby otrzymać malejący ciąg geometryczny, którego suma wszystkich wyrazów wynosi $127\frac{3}{4}$
13. Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie i spełniają równość $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. Oblicz iloraz q , który należy do przedziału $\langle 2\sqrt{2}; 3\sqrt{2} \rangle$

Ciągi Arytmetyczny i Geometryczny (4)

1. Ciąg (a_n) jest geometryczny i $a_2 = 5$, $a_5 = 40$. Dla jakiej wartości x ciąg $(x + a_3, a_4, a_6)$ jest arytmetyczny
2. Liczby $(18, x, y, \frac{16}{3})$ tworzą ciąg geometryczny, a liczby $(y, z, 3)$ ciąg arytmetyczny. Oblicz $x + y + z$
3. Liczby $(4, x + 4, 3x + 1)$ tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby $(x, y, z, 81)$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x, y, z
4. W ciągu arytmetycznym (a_n) : $a_3 = 15$. Podaj wzór tego ciągu, jeżeli (a_2, a_4, a_8) jest rosnącym ciągiem geometrycznym
- (R) 5. Trzy różne liczby, których suma wynosi 26 tworzą ciąg geometryczny i są jednocześnie pierwszym, trzecim i dziewiątym wyrazem ciągu arytmetycznego nieskoniecznego. Oblicz sumę 100 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- (R) 6. Suma 8 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wynosi 100. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu jeżeli (a_1, a_3, a_{11}) jest rosnącym ciągiem geometrycznym.
- (R) 7. Suma 3 liczb tworzących rosnący ciąg geometryczny wynosi 21. Jeżeli do tych liczb dodamy odpowiednio 1, 3, 2 to otrzymamy liczby utworzone w tej samej kolejności ciągu arytmetyczny. Co to za liczby?
- (R) 8. Liczby (x, y, z) tworzą rosnący ciąg geometryczny, a liczby $(x, y + 3, z + 3)$ ciąg arytmetyczny. Oblicz x, y, z jeżeli $z - y = 2x$
- (R) 9. Dany jest ciąg $(8, x, y, z, 36)$, którego suma wynosi 101. Wyznacz x, y, z , jeżeli pierwsze 3 wyrazy tego ciągu tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie 3 wyrazy ciągu arytmetyczny (w podanych kolejnościach)
- (R) 10. Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny o sumie 27. Ciąg $(a - 2, b, 2c + 1)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c
- (R) 11. Wykaż, że jeżeli ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = k^{a_n}$ jest geometryczny i $k \in \mathbb{R}_+$ to ciąg (a_n) jest arytmetyczny
- (R) 12. Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \log_k b_n$ jest arytmetyczny, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, $b_n > 0$ i $n \in \mathbb{N}_+$ to ciąg (b_n) jest geometryczny
- (R) 13. Ctery liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do tych liczb dodamy odpowiednio 13, 24, 27, 6, to otrzymamy ciąg arytmetyczny.

GRANICA CIĄGÓW LICZBOWYCH

(5)

Zad 1. Oblicz

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^5 + n^3 + 2n - 1)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2n^2 + 5n^3}{1 - 2n^3}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2n^2)^6}{(n^3 - 2)^2 \cdot (3n^2 - 1)^3}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{3n}{2-n} + \frac{5 - 2n^2}{1 + 3n^2} \right)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 - 1} - \frac{n^2 + 5n}{n - 3} \right)$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 7 + 10 + \dots + (3n + 1)}{5 - 2n^2}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 - 5n + 2})$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n-1)! - 2(n+1)!}$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n+1}{2n-1}}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n) \cos n^2}{1 + 2n^2}$$

$$11) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2 \cdot 6^n + 8^n}$$

$$12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5^{n+2}}{2^{2n} - 5^{n-1}}$$

Zad 2. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ jeżeli $a_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$

Zad 3. Dane są ciągi $a_n = \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{n}{2n-1} \right)$ $b_n = \frac{\binom{n}{2}}{2n^2 + 1}$

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{6} a_n} - \frac{1}{2} b_n}{(a_n)^2 + (b_n)^2}$

Zad 4. Dla jakich wartości k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k^2 - 9)n^2 - 2n + 5}{(k^2 + 4k + 3) + (k + 4)n - 1} = -2$$

Zad 5. Ciąg arytmetyczny (a_n) jest malejący i ujemny
 $a_1 = 2$, (a_2, a_3, a_7) tworzy ciąg geometryczny

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{(1 - 2n)^2}$

SZEREŻ GEOMETRYCZNY (6)

1. nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony następującym sposobem $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ dla $n \geq 1$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu

2. Liczbę 95 zapisano w postaci nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $\frac{2}{3}$. Podaj wartość ogólną tego ciągu

3. Dla pewnych liczb rzeczywistych x ciąg $(7-x, x+8, -2x, \dots)$ jest ciągiem geometrycznym. Szereg geometryczny wyznaczony przez ten ciąg jest zbieżny. Wyznacz sumę tego szeregu.

4. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , którego suma wszystkich wyrazów jest równa 81. Wyznacz a_5 jeżeli (a_1, a_2, a_3) jest ciągiem arytmetycznym

5. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 4, a suma kwadratów tych wyrazów wynosi 48. Wyznacz wartość ogólną tego ciągu.

6. Suma 2 pierwszych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego wynosi 4, a suma wszystkich wyrazów $4\frac{1}{2}$. Oblicz iloraz tego ciągu.

7. Rozwiąż równanie i nierówności, w którym lewa strona jest sumą ~~niektórych~~ zbieżnego szeregu geometrycznego

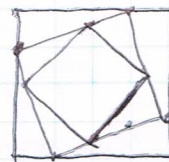
a) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots \leq 2$

b) $1 + (x^2 - 3x + 1) + (x^2 - 3x + 1)^2 + \dots = \frac{4}{5}$

c) $6x + \frac{6x^2}{2x-1} + \frac{6x^3}{(2x-1)^2} + \dots < 2x$

8. Dany jest nieskończony ciąg kwadratów $K_1, K_2, K_3, \dots$ przy czym bok kwadratu K_1 wynosi a , a bok każdego kolejnego powstaje tak jak na rysunku

każdy wierzchołek leży na boku poprzedniego i dzieli ten bok w stosunku $1:3$



Obwody wszystkich kwadratów tworzą nieskończony ciąg geometryczny. Oblicz sumę wszystkich tych obwodów

9. Dany jest nieskończony ciąg trójkątów równobocznych $T_1, T_2, T_3, \dots$. Trójkąt T_1 ma bok równy 12, a każdy kolejny trójkąt ma bok równy połowie boku poprzedniego trójkąta.

Pole tych trójkątów tworzy nieskończony ciąg geometryczny. Oblicz ich sumę.