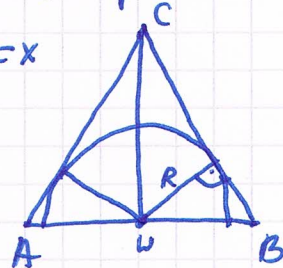


Zadania powtórkowe - analiza matematyczna.

1. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2x + 4}$
2. Wyznacz najmniejszą wartość jaką może przyjmować suma odwrotności pierwiastków równania $x^2 - 8x + k^2 + 4 = 0$
3. U paraboli $y = 6 - x^2$ wpisano prostokąt w taki sposób że 2 jego wierzchołki leżą na osi Ox , a dwa pozostałe na paraboli powyżej osi Ox . Uzasadnij że pole takiego prostokąta jest niewiększe od $8\sqrt{2}$
4. Suma 3 liczb dodatnich wynosi 24. Stosunek pierwszej liczby do drugiej wynosi 1:3. Wyznacz te trzy liczby tak aby iloczyn tych 3 liczb był największy i oblicz ten iloczyn.
5. Wszystkie wierzchołki trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD ($|AB| > |CD|$) należą do paraboli $y = -x^2 + 8x - 7$, która przecina oś Ox w punktach A i B . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu, który ma największe pole i oblicz to pole.
6. Funkcja f jest wielomianem 3-go stopnia i przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 1$ tworzy z osią Ox kąt 45° . Podaj wzór funkcji f
7. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny o najmniejszym polu. Wykaż, że ten trapez jest kwadratem o boku $2r$.
8. Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi Ox , których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ dla $x > -2$, a drugi koniec leży na prostej $y = 2x + 3$. Oblicz długość najkrótszego takiego odcinka.

9. W trójkąt równoramienny ABC w którym $|AC| = |BC|$ wpisano półkole o promieniu $2\sqrt{2}$. Jak na rysunku $|CW| = x$



9.1. Wykazać, że pole tego trójkąta $P(x)$ jako funkcja zmiennej, która jest wysokością $|CW|$ można obliczyć ze wzoru $P(x) = \frac{2\sqrt{2}x^2}{\sqrt{x^2 - 8}}$

9.2. Obliczyć ile będzie wynosić najmniejsze pole tego trójkąta.

10. Wykazać, że prosta o równaniu $y = -2x - 2$ jest styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

11. Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 24. Ile powinna wynosić krawędź podstawy tego ostrosłupa, tak aby jego objętość była największa.

12. Oblicz a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^4 - 5x^2 + 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{24x}{x^2 + 2x - 3} + \frac{6x}{x + 3} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x + 3 \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} - \frac{x^3 + 2x - 12}{3x^2 - 6x} \right)$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2x)^3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

13. Dla jakich wartości m funkcja posiada granicę w punkcie x_0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{dla } x < -2 \\ mx^2 + (m + 2)x + 1 & \text{dla } x > -2 \end{cases} \quad x_0 = -2$$

14. Funkcja $f(x) = \frac{ax + b}{2x^2 + 1}$ osiąga minimum równe $\frac{1}{4}$

dla $x = 1$. Oblicz a i b i wyznaczyć maksymalny przedział w którym ta funkcja jest malejąca.