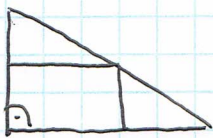


Planimetria - poziom rozszerzony.

1. Dany jest trójkąt o bokach $4, 6, 2\sqrt{3}$. Oblicz promień koła wpisanego w trójkąt i opisanego na nim oraz długość wysokości trójkąta poprowadzonej do najdłuższego boku.
2. Dwa boki trójkąta różnią się o 2 cm , kąt zawarty między nimi wynosi 120° , a trzeci bok trójkąta 7 cm . Oblicz pole trójkąta.
3. Pole trójkąta rozwartokątnego ABC wynosi 12 . Wiedząc, że $|AC| = 4$ i $|AB| = 10$, oblicz promień koła opisanego na trójkącie.
4. W ciworokącie $ABCD$ dane są $|AB| = 24$, $|CD| = 15$, $|AD| = 7$, a kąty przy wierzchołkach A i C są proste. Oblicz długość przekątnej $|AC|$.
5. Na boku AB trójkąta równobocznego ABC wybrano taki punkt D , że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Oblicz tangens kąta ACD .
6. Dany jest trójkąt ABC w którym $|AC| = 7$, $|BC| = \sqrt{31}$. Na boku AB wybrano taki punkt D , że $|DB| = 2 \cdot |AD|$, oraz $|DC| = 5$. Oblicz pole trójkąta ABC .
7. Czworokąt o bokach $3, 4, 5, 6$ jest opisany na okręgu. Oblicz promień tego okręgu.
8. W ciworokąt $ABCD$ w, którym $|AD| = 5\sqrt{3}$, $|CD| = 6$ można wpisać okrąg. Przekątna BD tworzy z bokiem AB kąt o miarze 60° , a z bokiem AD , taki kąt α , że $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz długości pozostałych boków i długości przekątnej BD tego ciworokąta.
9. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC tworzy z bokiem $|AB|$ taki kąt α , że $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, oraz $|CB| = 25$. W trójkąt ten wpisano okrąg. Punkt D to punkt styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Oblicz długość odcinka $|AD|$.
10. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa 36 , a promień okręgu wpisanego w trójkąt wynosi 10 . Oblicz długości boków trójkąta i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
11. Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu o długości 12 jest średnicą okręgu. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P . Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP .
12. Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10 , a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD . Oblicz pole tego trapezu.
13. Czworokąt o kolejnych bokach 2 cm i 4 cm i kącie między nimi 120° jest opisany na okręgu. Oblicz długości pozostałych boków, jeżeli na tym ciworokącie można również opisać okrąg.

Planimetria rozszerzona cd.

14. Obwód trapezu równoramiennego wynosi 44, a długość podstawy ma długość 20. Oblicz promień koła opisanego na tym trapezie, jeżeli przekątna trapezu zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego tego trapezu.
15. Trapez prostokątny jest opisany na okręgu o promieniu 10. Kąt ostry trapezu wynosi 45° . Oblicz długość odcinków, na które punkt styczności okręgu podzielił dłuższe ramię trapezu.
16. Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta ABCD, w którym $|AB| > |BC|$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $\angle AEF = 90^\circ$. Wykaż, że kąty BAE i EAF mają równe miary.
17. W okręgu o środku O i promieniu r poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy o długościach x i y, które przecięły się wewnątrz okręgu w punkcie $P \neq O$. Oblicz długość odcinka $|OP|$.
18. Wykaż, że w każdym trójkącie prostokątnym o różnicach przyprostokątnej dwusieczna kąta prostego dzieli na połowy kąt zawarty między wysokością a środkową, które zostawia poprowadzone z wierzchołka kąta prostego.
19. Wykaż, że w równoległoboku o bokach a i b oraz przekątnych x i y prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 \geq xy$.
20. Na trapezie można opisać okrąg, można w ten trapez także wpisać okrąg. Oblicz promienie tych okręgów jeżeli podstawy trapezu mają 4 i 16.
21. W trójkącie prostokątnym o polu S wpisano prostokąt jak na rysunku



Wykaż, że pole prostokąta nie może być większe od $\frac{4}{3}S$.

22. W trójkącie ABC w którym $|BC| = a$ z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC. Punkt S jest środkiem odcinka BP. Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P. Oblicz długość odcinka CP.
23. W trójkącie ABC $|AB| = 4$, $|AC| = 6$, $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie D. Oblicz długość odcinka AD.
24. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta i $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$ to ten trójkąt jest równoramienny.
25. Boki trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $k > 0$. Wykaż, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość k.