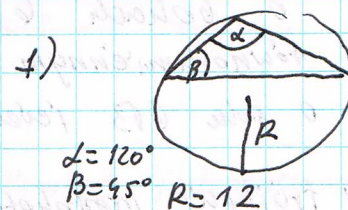
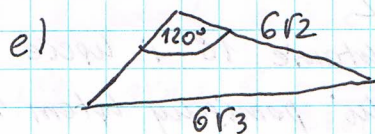
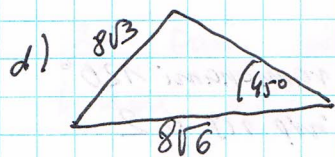
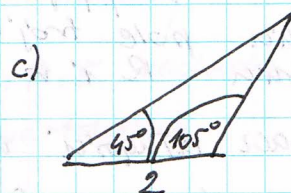
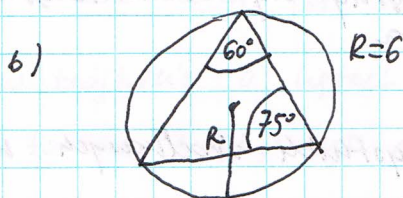


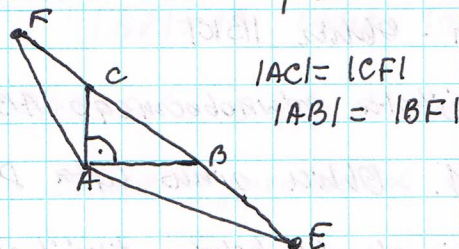
Twierdzenie sinusów i cosinusów.

1. Wyznaczyć długości pozostałych boków trójkąta, miary pozostałych kątów



2. Dany jest trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ o obwodzie 20

Konstruując z danych na rysunku oblicz promień koła opisanego na trójkącie AEF



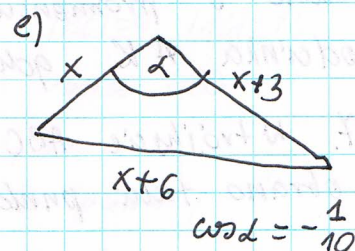
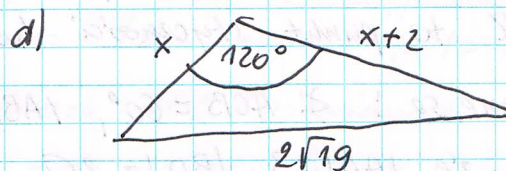
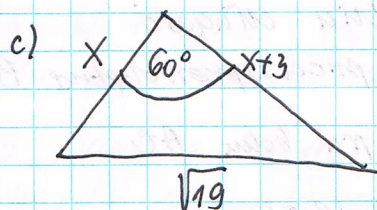
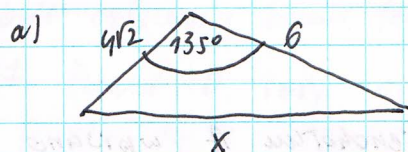
3. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAD

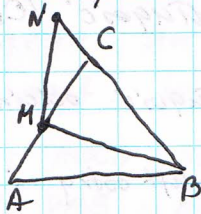
4. W trójkącie dane są: kąty α, β, γ i bok leżący naprzeciw kąta α równy a . Wykaż, że $P_D = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$

5. W trójkącie o kątach α, β, γ i promieniu koła opisanego na trójkącie wykaż, że $P_D = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

6. W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku B z wierzchołka C poprowadzono odcinek CD, gdzie D leży na boku AB. Odcinek ten podzielił kąt przy wierzchołku C na 2 kąty o miarach α i β . Wiedząc, że długość $|AD| = a$ oblicz długość $|CD|$

7. Korzystając z danych na rysunkach oblicz długość odcinka x



8. Dany jest trójkąt o bokach a) $4\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, 4$. b) $4, 5\sqrt{2}, 7$
- oblicz cosinus największego kąta i rozstrzygnij czy trójkąt jest ostrokatny, prostokątny czy rozwartokątny
 - oblicz pole trójkąta
 - oblicz R i r
9. Wyznacz długości wszystkich środkowych w trójkątach
- o bokach 6, 8, 12
 - równoramiennym o podstawie 18 i kącie między ramionami 120°
 - o polu 613 jeżeli boki pomiędzy kątem 120° różnią się o 2
10. W trójkącie prostokątnym ABC o przeciwprostokątnej $|AB|=8$ poprowadzono środkową CD i dwusieczną kąta CAB , które przecięły się w punkcie K pod kątem prostym. Oblicz $|BK|$
11. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD|:|DB|=2:1$. Oblicz sinus kąta DAB
12. Suma długości dwóch boków trójkąta wynosi 4, a kąt między bokami trójkąta ma miarę 120° . Oblicz najmniejszą wartość sumy kwadratów długości wszystkich boków tego trójkąta.
13. W trójkącie ostrokatnym ABC o polu $10\sqrt{3}$ dane są $|AC|=5, |AB|=8$. Oblicz r i R
14. W trójkącie dane są długości 2 boków: 3cm i 5cm i długość środkowej poprowadzonej do 3 boku równa 2cm. Oblicz pole trójkąta i pole koła opisanego na trójkącie
15. W trójkącie równobocznym ABC punkt M to dowolny punkt na boku AC . Konstatując z danych na rysunku wynika, że $|BM|=|MN|$ jeżeli $|AM|=|CN|$
- 
16. W trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A wpisano koło o promieniu $r=\sqrt{3}$. Wiadomo, że $\angle ABC=30^\circ$. Oblicz długość odcinka AK gdzie K to punkt styczności koła z przeciwprostokątną BC
17. W trójkącie ABC , dane są: $\angle ACB=60^\circ, |AB|=\sqrt{31}$. Na boku AC obrano taki punkt D , że $|AD|=3, |BD|=2\sqrt{7}$. Oblicz $|BC|$

18. Wykazać, że jeżeli w trójkącie o kątach α, β, γ zachodzą związki $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$ to ten trójkąt jest równoramienny.

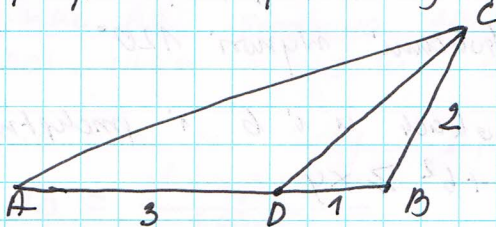
19. Wykazać, że jeżeli w trójkącie o kątach α, β, γ zachodzą związki $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma$ to ten trójkąt jest rozwartokątny.

20. Dany jest trójkąt o bokach a, b, c i kąt α między bokami b i c . Wykazać, że $\sin \alpha \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

21. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg. Prosta k jest styczna do okręgu w punkcie A . Prosta BC przecina prostą k w punkcie P . Wiedząc, że $|AC|=12$, $|BC|=9$, $|BP|=17$ oblicz $|AB|$.

22. W trójkącie ABC kąt $CAB=60^\circ$, D jest środkiem boku AB oraz $|BC|=|CD|=\sqrt{7}$. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

23. Korzystając z danych na rysunku oblicz $|AC| : |DC|$.



24. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC oraz $|AB|=14$, $|BD|=12$, $|CD|=239$ i $|AC|=4\sqrt{15} \cdot |AD|$. Oblicz pole trójkąta ABC .

25. W trójkącie o bokach a, b, c miara kąta leżącego naprzeciw boku a jest 2 razy większa od kąta leżącego naprzeciw boku b . Wykazać, że $a^2 - b^2 = bc$.

26. Długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi a miara największego kąta jest 2 razy większa od miary najmniejszego kąta. Oblicz długości boków tego trójkąta.

27. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC|=16$, $|AD|=6$, $|CD|=14$ i $|BC|=|BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC .

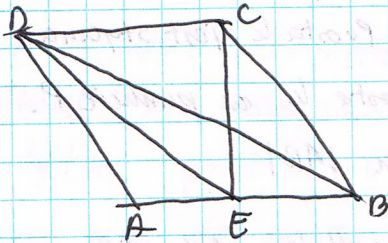
28. W trójkącie prostokątnym ABC dane są przyprostokątne $|BC|=9$, $|AC|=12$. Na boku AB wybrano punkt $D \neq B$ taki, że $|BC|=|CD|$. Oblicz $|AD|$.

29. Dane są 3 okręgi o środkach A, B, C i promieniach $r, 2r, 3r$ każde 2 okręgi są zewnętrznie styczne. Punkty K, L, M to punkty styczności tych okręgów. Oblicz $P_{\triangle KLM}$.

30. Obwód trójkąta wynosi 20. Jeden z boków ma długość 7, a kąt leżący naprzeciw tego boku ma miarę 60° . Oblicz długość środkowej poprowadzonej do najdłuższego boku.

31. W równoległoboku miara kąta ostrego wynosi 30° , a odległość punktu przecięcia przekątnej od sąsiednich boków są równe 2 i $\sqrt{3}$. Oblicz długość dłuższej przekątnej równoległoboku.

32. Dłuższa przekątna BD rombu ABCD przecina wysokość CE w punkcie F. Oblicz pole rombu jeżeli $|DE| = \sqrt{313}$ i $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$ (rys)



33. Boki równoległoboku różnią się o 3 cm, kąt ostry ma 60° , a dłuższa przekątna $3\sqrt{7}$. Oblicz pole równoległoboku.

34. Oblicz pole utworzone z boków 1, 2, 3, 4 jeżeli miara kąta między dwoma najkrótszymi bokami wynosi 120° .

35. Wykaż, że w równoległoboku o bokach a i b i przekątnych x i y prawdziwa jest równość $a^2 + b^2 \geq xy$.

36. Dany jest trójkąt ostrokatny o bokach a, b, c i kątach leżących naprzeciw nich α, β, γ . Wykaż, że $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$.

37. W trapezie ABCD punkt P to punkt przecięcia przekątnej. Podstawa CD jest o 2 mniejsza od podstawy AB, a promień okręgu opisanego na trójkącie ostrokatnym CPD jest o 3 mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie APB. Wykaż, że

$$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} |DP| \cdot |CP|$$

38. W czworokącie ABCD dane są długości boków $|AB| = 24$, $|CD| = 15$, $|AD| = 7$. Ponadto kąty DAB i BCD są proste. Oblicz pole tego czworokąta oraz długości jego przekątnej.

39. W trapezie ABCD dane są podstawa $|AB| = 10\sqrt{2}$ i $\angle DAB = 75^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$ i przekątna $|AC| = 10$. Oblicz długości pozostałych boków oraz długości przekątnej BD.

40. W czworokącie ABCD, dane są $|AB| = 3$, $|BC| = \sqrt{19}$, $|CD| = \sqrt{21}$, $|AD| = 4$ oraz przekątna $|AC| = 5$. Oblicz długości przekątnej BD.