

Zbiór zadań - funkcja kwadratowa

Poziom podstawowy

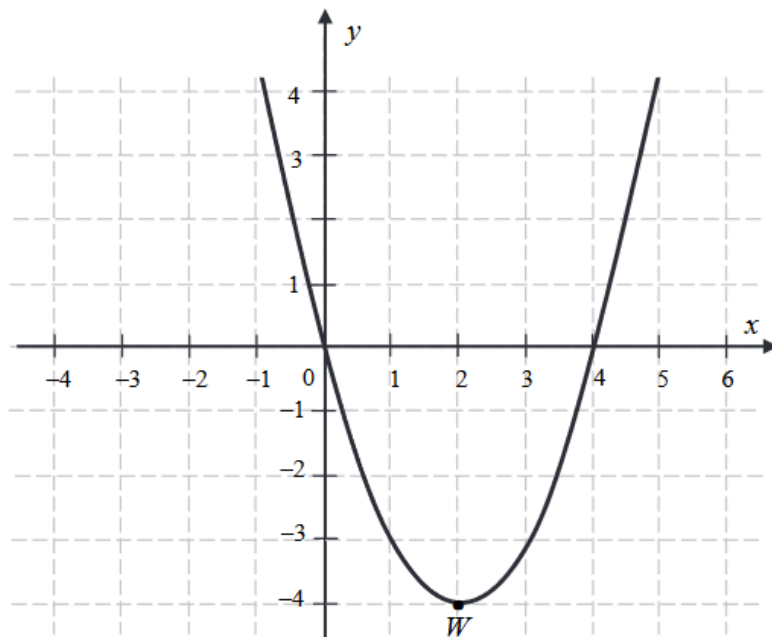
Zadanie 1. (1 pkt)

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -(x+7)(x-3)$ jest:

- A. $(-\infty; 25)$ B. $(-\infty; -2)$ C. $(25; +\infty)$ D. $(-\infty; 2\frac{1}{2})$

Zadanie 2. (1 pkt)

Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (2, -4)$. Liczby 0 i 4 to miejsca zerowe funkcji f .



Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- A. $(-\infty; 0)$ B. $(0, 4)$ C. $(-4, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

Zadanie 3. (1 pkt)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -2(x+3)(x-5)$. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f , ma współrzędną x równą

- A. (-3) B. (-1) C. 1 D. 5

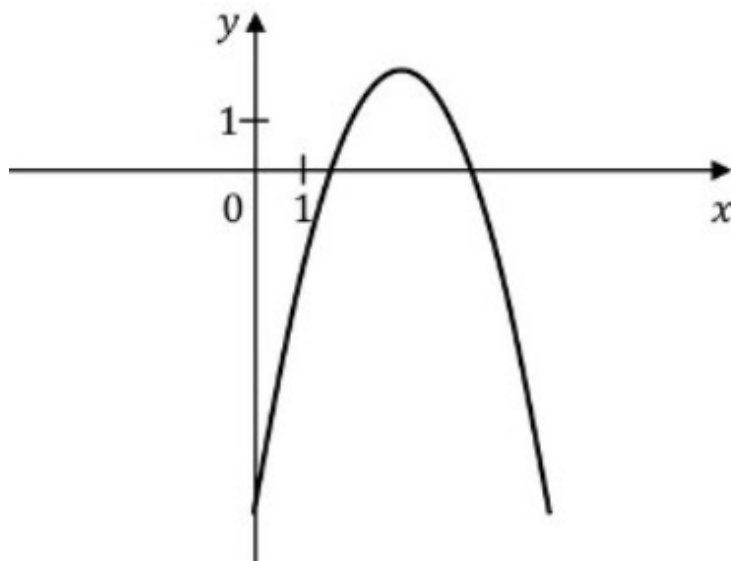
Zadanie 4. (1 pkt)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -x^2 + 4$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-4, +\infty)$ D. $(-\infty, 4)$

Zadanie 5. (1 pkt)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f .



Jeden spośród podanych poniżej wzorów jest wzorem tej funkcji. Wskaż wzór funkcji f .

A. $f(x) = x^2 - 6x + 11$

B. $f(x) = -x^2 + x + 2$

C. $f(x) = x^2 - 6x - 7$

D. $f(x) = -x^2 + 6x - 7$

Zadanie 6.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(3, 0)$. Ta parabola przechodzi przez punkt o współrzędnych $(0, -9)$.

Zadanie 6.1. (1 pkt)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest malejąca w przedziale

A. $(-\infty, 0]$

B. $(-\infty, 3]$

C. $[0, +\infty)$

D. $[3, +\infty)$

Zadanie 6.2. (2 pkt)

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A-F i wpisz te litery w wykropkowanych miejscach.

Wzór funkcji f zapisano w odpowiedziach oznaczonych literami: oraz

A. $f(x) = -x^2 - 9$

B. $f(x) = -(x - 3)^2$

C. $f(x) = -(x + 3)^2$

D. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

E. $f(x) = -x^2 - 6x + 9$

F. $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

Zadanie 6.3. (1 pkt)

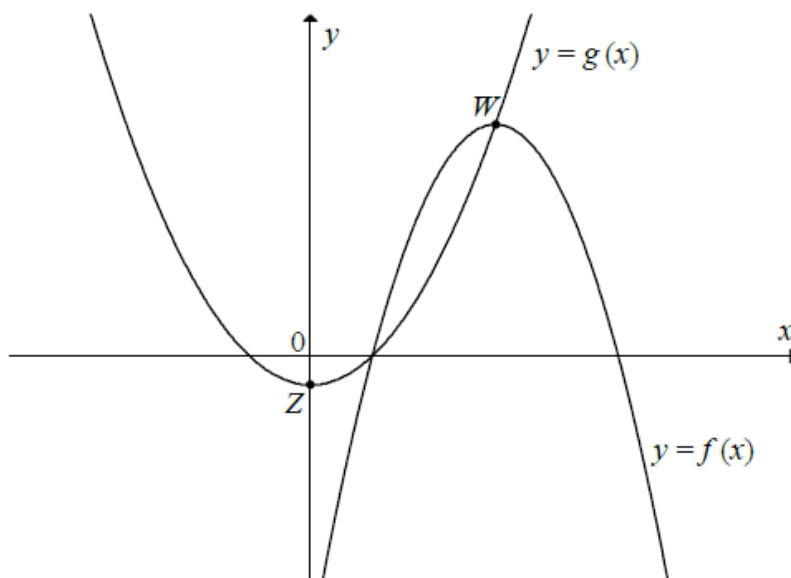
Funkcja kwadratowa g jest określona za pomocą funkcji f następująco: $g(x) = f(x) - 1$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja g ma jedno miejsce zerowe.	P	F
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) osią symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x = 3$.	P	F

Zadanie 7. (4 pkt)

Na rysunku są przedstawione fragmenty wykresów funkcji kwadratowych f i g . Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, a mniejsze z jej miejsc zerowych jest jednocześnie miejscem zerowym funkcji g . Wierzchołek W paraboli, która jest wykresem funkcji f , leży na wykresie funkcji g , a wierzchołek Z paraboli będącej wykresem funkcji g leży na osi Oy układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji g .

**Zadanie 8. (1 pkt)**

Funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$ jest malejąca w przedziale

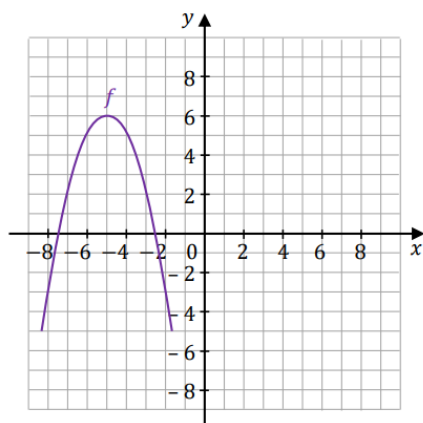
- A. $\langle 1, +\infty \rangle$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(-\infty, -8)$ D. $\langle -8, +\infty \rangle$

Zadanie 9.

Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 9.1. (1 pkt)

Dana jest funkcja kwadratowa $y = f(x)$, której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A–D to wzór funkcji f .

Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ jest określona wzorem

- A. $y = -(x + 5)^2 - 6$
- B. $y = -(x + 5)^2 + 6$
- C. $y = -(x - 5)^2 - 6$
- D. $y = -(x - 5)^2 + 6$

Zadanie 9.2. (2 pkt)

Do wykresu pewnej funkcji kwadratowej $y = g(x)$ należy punkt o współrzędnych $P = (2, -6)$. Ośią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 3$, a jednym z miejsc zerowych funkcji g jest $x_1 = 1$.

Wyznacz i zapisz wzór funkcji $y = g(x)$ w postaci iloczynowej.

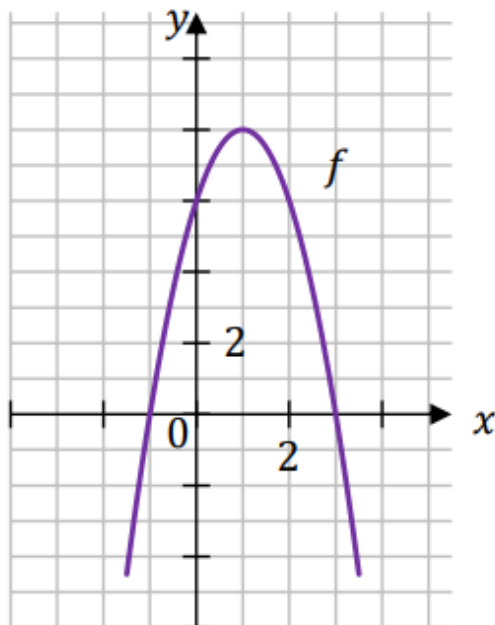
Zadanie 10. (1 pkt)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = (-3, 2)$. Wzór tej funkcji w postaci kanonicznej to

- A. $f(x) = 3(x - 3)^2 + 2$
- B. $f(x) = 3(x + 3)^2 + 2$
- C. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$
- D. $f(x) = (x + 3)^2 + 2$

Zadanie 11.

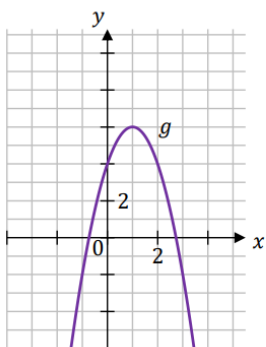
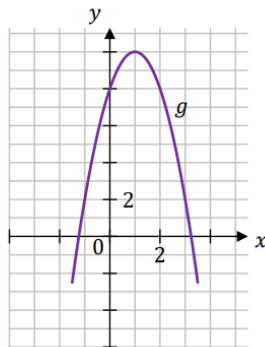
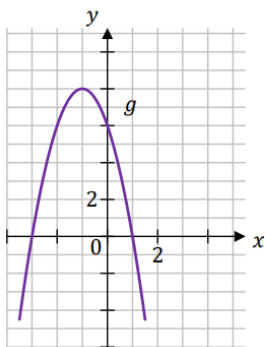
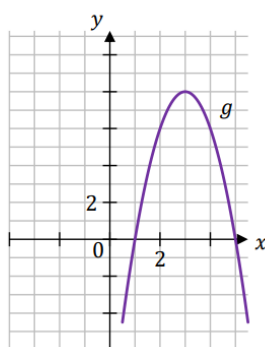
Dana jest funkcja kwadratowa f , której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f , oraz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych mają współrzędne całkowite.

**Zadanie 11.1. (1 pkt)**

Funkcja g jest określona za pomocą funkcji f następująco: $g(x) = f(x - 2)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres funkcji g przedstawiono na rysunku

A.**B.****C.****D.**

Zadanie 11.2. (1 pkt)

Wyznacz i zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór wszystkich rozwiązań nierówności:

$$f(x) \leq 0$$

.....

Zadanie 11.3. (3 pkt)

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (1 pkt)

Funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ osiąga dla $x = 2$ wartość najmniejszą równą 4. Wtedy

- A. $b = -4, c = 8$
- B. $b = 4, c = -8$
- C. $b = -4, c = -8$
- D. $b = 4, c = 8$

Zadanie 13. (1 pkt)

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -2(x - 2)(x + 1)$. Funkcja f jest rosnąca w zbiorze

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
- B. $(-1, 2)$
- C. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$
- D. $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Zadanie 14. (1 pkt)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 - b - 2\sqrt{2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2} + 1$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik b we wzorze funkcji f jest równy

- A. (-3)
- B. 3
- C. $3 - \sqrt{2}$
- D. $3 - 2\sqrt{2}$

Zadanie 15. (1 pkt)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 3x^2 + 2x + m$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Współczynnik m jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f

A.	ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,	ponieważ	1.	$4 - 12m > 0$
B.	ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,		2.	$4 - 12m = 0$
C.	nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,		3.	$4 - 12m < 0$

Zadanie 16. (2 pkt)

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola, na której leży punkt $A = (0, -5)$. Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 7$. Oblicz wartości współczynników b i c .

Zadanie 17. (2 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = -3x^2 + bx + c$ dla $x \in \mathbb{R}$. Prosta o równaniu $x = 2$ jest osią symetrii paraboli będącej jej wykresem, a zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 21]$. Wyznacz współczynniki b i c .

Zadanie 18. (2 pkt)

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że $1 + c > b$.

Zadanie 19. (5 pkt)

Wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny. Punkty $A = (-5, 0)$ i $B = (3, 0)$ należą do wykresu funkcji f . Oblicz wartości współczynników a , b oraz c .

Zadanie 20. (2 pkt)

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 3$ w przedziale $(0, 4)$.

Zadanie 21. (4 pkt)

Największa wartość funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - 2)^2 - 4$, gdzie $a \neq 0$, w przedziale domkniętym $\langle -4, -2 \rangle$ jest równa 12. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -4, -2 \rangle$.

Zadanie 22. (2 pkt)

Funkcja kwadratowa f przyjmuje w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$ największą wartość dla argumentów 0 i 3. Uzasadnij, że w przedziale $\langle -2, 5 \rangle$ funkcja f przyjmuje największą wartość dla argumentów -2 i 5 .

Zadanie 23. (4 pkt)

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość współczynnika a .

Zadanie 24. (1 pkt)

Funkcja $f(x) = (m + 3)x^2 + 16x + 5$ osiąga wartość największą dla $x = 2$. Oznacza to, że największa wartość tej funkcji jest równa:

A. -7 B. -14 C. 14 D. 21 **Zadanie 25. (1 pkt)**

Największą wartością funkcji $y = -(x - 2)^2 + 4$ w przedziale $\langle 3, 5 \rangle$ jest

A. 0 B. 5 C. 4 D. 3 **Zadanie 26. (1 pkt)**

Najmniejszą wartością funkcji $f(x) = (1 - x)(x - 5)$ w przedziale $\langle -1, 5 \rangle$ jest

A. 6 B. 0 C. -6 D. -12 **Zadania optymalizacyjne**

Zadanie 27. (1 pkt)

Producent latarek przeanalizował wpływ zmiany ceny latarki L25 na liczbę kupujących ten produkt. Z analizy wynika, że roczny zysk Z ze sprzedaży latarek L25 wyraża się wzorem

$$Z(x) = (500 + 50x)(16 - x)$$

gdzie:

x - kwota obniżki ceny latarki L25 (wyrażona w pełnych złotych), spełniająca warunki $x \geq 1$ i $x \leq 14$,

Z - roczny zysk ze sprzedaży latarek L25 (wyrażony w złotych), liczony od momentu obniżenia ceny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Roczny zysk Z ze sprzedaży latarek L25 będzie największy dla x równego

A. 3

B. 4

C. 7

D. 14

Zadanie 28. (2 pkt)

Hotel ma do dyspozycji gości 80 pokoi jednoosobowych. Właściciel hotelu przeanalizował wpływ ceny za dobę hotelową na liczbę wynajętych pokoi i stwierdził, że:

- przy wyjściowej cenie wynoszącej 120 zł za jedną dobę hotelową wszystkie pokoje są wynajęte
- każdy wzrost ceny za dobę hotelową o 5 zł skutkuje spadkiem liczby wynajmowanych pokoi o 1.

Przyjmijmy, że dobowy przychód P hotelu z wynajmowania pokoi, w zależności od podwyżki ceny wyjściowej za dobę hotelową o $5x$ złotych, opisuje funkcja

$$P(x) = (80 - x)(120 + 5x)$$

gdzie x jest liczbą całkowitą spełniającą warunki $x \geq 0$ i $x \leq 80$.

Oblicz, jaka powinna być cena wynajęcia jednoosobowego pokoju (za dobę hotelową), aby dobowy przychód hotelu z wynajmowania pokoi był największy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 29.

Właściciel pewnej apteki przeanalizował dane dotyczące liczby obsługiwanych klientów z 30 kolejnych dni. Przyjmijmy, że liczbę L obsługiwanych klientów n -tego dnia opisuje funkcja

$$L(n) = -n^2 + 22n + 279$$

gdzie n jest liczbą naturalną spełniającą warunki $n \geq 1$ i $n \leq 30$.

Zadanie 29.1. (1 pkt)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Łączna liczba klientów obsługiwanych w czasie wszystkich analizowanych dni jest równa $L(30)$.	P	F
W trzecim dniu analizowanego okresu obsłużono 336 klientów.	P	F

Zadanie 29.2. (2 pkt)

Którego dnia analizowanego okresu w aptecce obsłużono największą liczbę klientów? Oblicz liczbę klientów obsługiwanych tego dnia. Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (4 pkt)

Zakład stolarski produkuje krzesła, które sprzedaje po 196 złotych za sztukę. Właściciel, na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków, stwierdził, że:

- przychód P (w złotych) ze sprzedaży x krzesel można opisać funkcją $P(x) = 196x$
- koszt K (w złotych) produkcji x krzesel dziennie można opisać funkcją

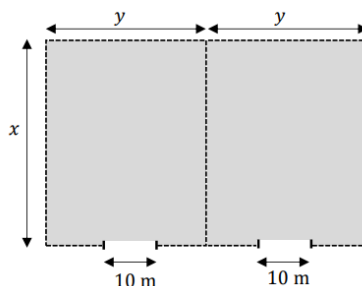
$$K(x) = 4x^2 + 4x + 240$$

Dziennie w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 30 krzesel. Oblicz, ile krzesel powinien dziennie sprzedawać zakład, aby zysk ze sprzedaży krzesel wyprodukowanych przez ten zakład w ciągu jednego dnia był możliwie największy. Oblicz ten największy zysk. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.

Zadanie 31. (4 pkt)

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Zadanie 32. (4 pkt)

Rozważamy wszystkie równoległoboki o obwodzie równym 200 i kącie ostrym o mierze 30° .

Podaj wzór i dziedzinę funkcji opisującej zależność pola takiego równoległoboku od długości x boku równoległoboku.

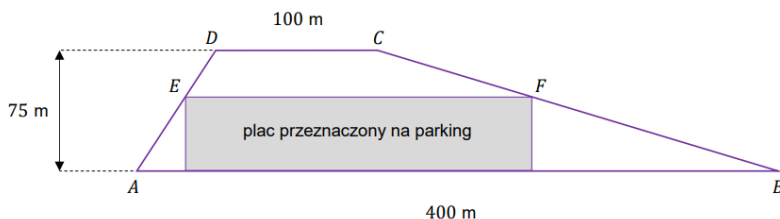
Oblicz wymiary tego z rozważanych równoległoboków, który ma największe pole, i oblicz to największe pole.

Zapisz obliczenia

Zadanie 33. (4 pkt)

Działka ma kształt trapezu. Podstawy AB i CD tego trapezu mają długości $|AB| = 400$ m oraz $|CD| = 100$ m. Wysokość trapezu jest równa 75 m, a jego kąty DAB i ABC są ostre.

Z działki postanowiono wydzielić plac w kształcie prostokąta z przeznaczeniem na parking. Dwa z wierzchołków tego prostokąta mają leżeć na podstawie AB tego trapezu, a dwa pozostałe - E oraz F - na ramionach AD i BC trapezu (zobacz rysunek).



Wyznacz długości boków prostokąta, dla których powierzchnia wydzielonego placu będzie największa. Wyznacz tę największą powierzchnię. Zapisz obliczenia.

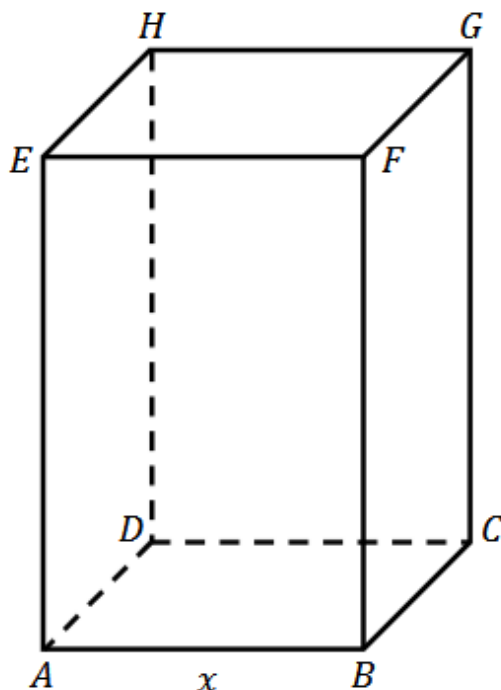
Wskazówka:

Aby powiązać ze sobą wymiary prostokąta, skorzystaj z tego, że pole trapezu $ABCD$ jest sumą pól trapezów $ABFE$ oraz $EFCD$:

$$P_{ABCD} = P_{ABFE} + P_{EFCD}$$

Zadanie 34. (4 pkt)

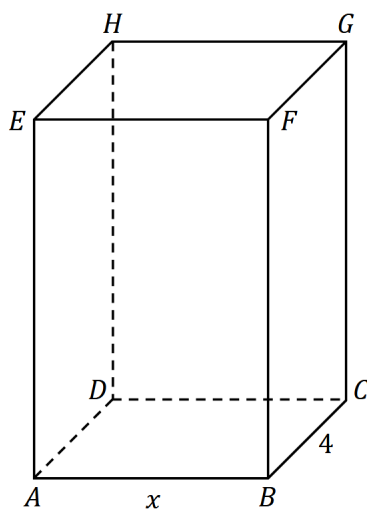
Rozważamy wszystkie prostopadłościany $ABCDEFGH$, w których krawędź AE jest 3 razy dłuższa od krawędzi AB , a suma długości wszystkich dwunastu krawędzi prostopadłościanu jest równa 48 (zobacz rysunek). Niech $P(x)$ oznacza funkcję pola powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB .



Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P . Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe. Zapisz obliczenia.

Zadanie 35. (4 pkt)

Rozważamy wszystkie prostopadłościany $ABCDEFGH$, w których krawędź BC ma długość 4 oraz suma długości wszystkich krawędzi wychodzących z wierzchołka B jest równa 15 (zobacz rysunek).



Niech $P(x)$ oznacza funkcję pola powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB .

Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P . Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe. Zapisz obliczenia.