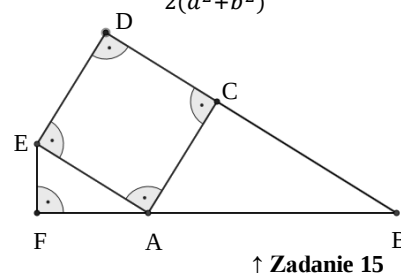
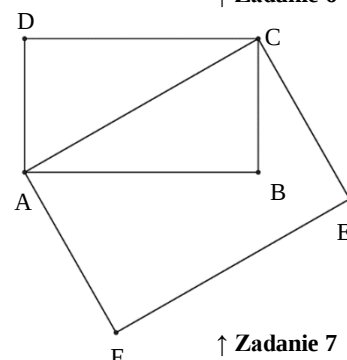
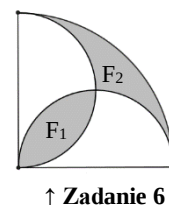
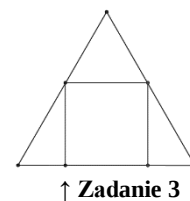
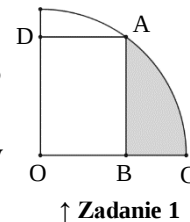
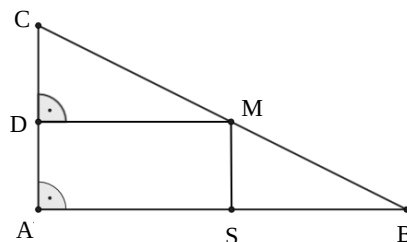


PLANIMETRIA – ZAKRES PODSTAWOWY

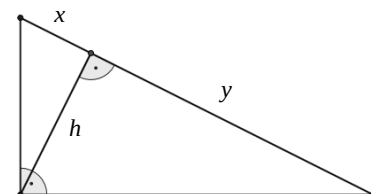
- W ćwiartkę okręgu wpisano prostokąt (rysunek obok). Oblicz pole zacieniowanego obszaru, jeżeli $|OB| = |BC| = a$.
- Podstawy trapezu równoramiennego mają długość a i $2a$. Przekątna trapezu zawiera się w dwusiecznej kąta przy dłuższej podstawie. Oblicz pole tego trapezu.
- W trójkąt równoboczny o boku a wpisano kwadrat (rysunek obok). Oblicz pole kwadratu.
- Wykaż, że przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.
- W trójkącie o kątach 60° , 45° , 75° poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta o mierze 75° . Oblicz stosunek długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwległy bok trójkąta.
- W ćwiartkę koła wpisano półkole (rysunek obok). Wykaż, że pole figur F_1 i F_2 są równe.
- Przekątna AC prostokąta $ABCD$ jest bokiem podobnego do niego prostokąta $ACEF$ (rysunek obok). Pole wspólnej części tych prostokątów stanowi 40% prostokąta $ACEF$. Znajdź stosunek długości boków prostokąta $ABCD$.
- Wewnątrz trójkąta równobocznego o boku a wybrano dowolny punkt P . Oblicz sumę odległości punktu P od boków tego trójkąta.
- Wykaż, że kąt ostry zawarty między przekątnymi prostokąta jest 2 razy większy od kąta, jaki tworzy przekątna z dłuższym bokiem prostokąta.
- W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB , którą przedłużono o odcinek BC długości równej długości promienia tego okręgu. Przez punkt C i O przeprowadzono sieczną CD . Wykaż, że kąt AOD ma miarę 3 razy większą od miary kąta ACD .
- Pole trapezu wynosi 120, a długości podstaw są w stosunku $2 : 3$. Oblicz pole trójkąta dobudowanego przez przedłużenie ramion tego trapezu.
- W kwadracie $ABCD$ o boku $2x$ punkt K jest środkiem boku AD . Proste AC i BK przecinają się w punkcie M . Oblicz długości odcinków BK i KM .
- Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano 2 koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
- W trójkącie prostokątnym ABC $|AB| = a$, $|AC| = b$, gdzie $a > b$. Z wierzchołka kąta prostego poprowadzono wysokość AD . Wykaż, że pole trójkąta ADC można obliczyć ze wzoru $\frac{ab^3}{2(a^2+b^2)}$.
- Oblicz pole trójkąta FAE (rysunek obok), jeżeli $|AC| = |CD| = 5$ i $|BC| = 12$.
- Dla jakich wartości x z odcinków o długościach $2x + 3$, 12 , $10 - x$ można zbudować trójkąt?
- Dane są 2 okręgi o wspólnym środku. Cięciwa większego okręgu styczna do mniejszego ma długość x . Oblicz pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te okręgi.
- W trapezie $ABCD$ połączono środek ramienia BC z wierzchołkami A i D . Wykaż, że pole tak otrzymanego trójkąta jest równe połowie pola trapezu.
- W trapezie równoramiennym ramiona mają po 7 cm, przekątna 8 cm, a odcinek łączący środki ramion 4 cm. Oblicz długości podstaw.
- W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego h . Wykaż, że $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.
- W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b poprowadzono dwusieczną kąta prostego. Oblicz długość odcinka dwusiecznej zawartej wewnątrz trójkąta.
- Wykaż, że jeżeli wysokości trójkąta mają długość 20, 15 i 12, to ten trójkąt jest prostokątny.
- W trapezie o podstawach a i b , gdzie $a > b$, oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych trapezu.
- Czworokąt jest wpisany w okrąg. Wierzchołki czworokąta podzieliły ten okrąg w stosunku $3 : 4 : 5 : 6$. Oblicz miary kątów czworokąta.



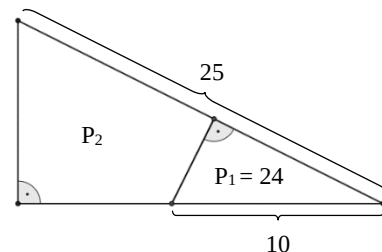
25. W trójkącie prostokątnym o bokach a, b, c , gdzie c – przeciwprostokątna, wpisano okrąg o promieniu r . Wykaż, że $r = \frac{a+b-c}{2}$.
26. Dany jest trójkąt o bokach a, b, c i polu P . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
27. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC jest styczny do przeciwprostokątnej AB w punkcie K . Wiadomo, że $|AK| = 4$, $|KB| = 6$. Oblicz promień tego okręgu.
28. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 cm i 12 cm. Oblicz odległość punktu przecięcia środkowych tego trójkąta od wierzchołka trójkąta przy kącie prostym.
29. W jakim wielokącie stosunek ilości przekątnych do ilości boków wynosi $9 : 2$?
30. W trójkąt równoboczny wpisano koło i na tym trójkącie opisano koło. Pole powstałego pierścienia wynosi 6π . Oblicz pole trójkąta.
31. Przekątne rombu różnią się o 4 cm, a obwód rombu wynosi 40 cm. Oblicz promień koła wpisanego w romb i pole rombu.
32. Podstawy trapezu wynoszą 16 cm i 44 cm, a ramiona 17 cm i 25 cm. Oblicz pole trapezu.
33. Ramiona trapezu równoramiennego wynoszą po 5 cm, a odcinek łączący środki ramion jest równy $8\frac{1}{2}$ cm. Oblicz długości podstaw, jeżeli wysokość trapezu wynosi 4 cm.
34. Pole trójkąta prostokątnego wynosi 39, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 6. Oblicz obwód trójkąta.
35. Obwód trapezu $ABCD$ jest równy 24. Kąt między ramieniem AD o długości 6, a dłuższą podstawą AB wynosi 60° . Przekątna BD trapezu dzieli go na 2 trójkąty, których stosunek pól wynosi 3. Oblicz pole trapezu.
36. W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych wynosi k , a przeciwprostokątna ma długość c . Oblicz pole trójkąta.
37. Różnica pól 2 figur podobnych wynosi 56, a skala podobieństwa $\frac{3}{4}$. Oblicz pole każdej figury.
38. Korzystając z danych na rysunku wykaż, że $\frac{|DM|}{|AB|} + \frac{|MS|}{|AC|} = 1$.
39. Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Prosta równoległa do podstaw trapezu przechodząca przez P przecina ramiona AD i BC w punktach M i N . Wykaż, że $|MP| = |NP|$.
40. Korzystając z danych na rysunku, wykaż, że $h^2 = xy$.
41. Przekątne trapezu są prostopadłe. Wysokość trapezu wynosi 4, a jedna z przekątnych 5. Oblicz pole trapezu.
42. Z prostokąta odcięto kwadrat i powstał prostokąt podobny do danego. Oblicz stosunek długości boków danego prostokąta.
43. Korzystając z danych na rysunku, oblicz pole P_2 .
44. Korzystając z danych na rysunku, wykaż, że $a \cdot b = c \cdot d$.
45. Wykaż, że nie istnieje trójkąt o wysokościach 2 cm, 3 cm i 12 cm.
46. W trójkącie prostokątnym okrąg o promieniu r jest styczny do obu przyprostokątnych, a jego środek leży na przeciwprostokątnej o długości x i dzieli ją w stosunku $2 : 3$. Oblicz pole trójkąta.
47. W trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie jest prostopadła do ramienia. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego trójkąta.
48. W okręgu poprowadzono średnicę AB i równoległą do niej cięciwę DC . Wiadomo, że $|AC| = 12$, $|AD| = 5$. Oblicz promień okręgu.
49. Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$. Wykaż, że:
 $|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$.
50. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P . Wykaż, że punkty B, P i D są współliniowe.



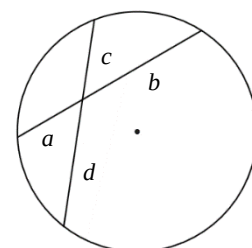
↑ Zadanie 38



↑ Zadanie 40

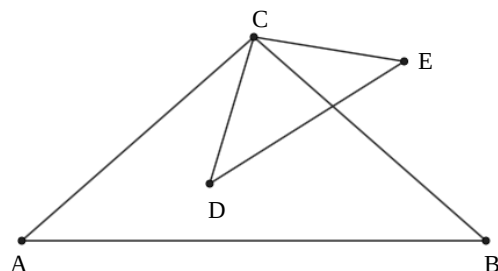


↑ Zadanie 43

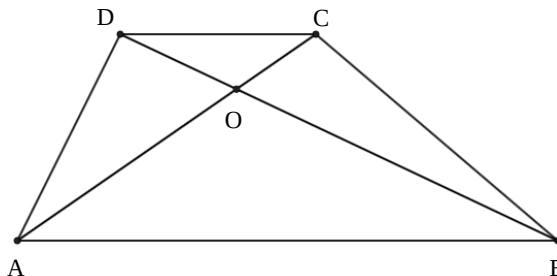


↑ Zadanie 44

51. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta ABC wybrano punkty D i E w taki sposób, że $|AC| = |AE|$ oraz $|BC| = |BD|$. Wykaż, że $|\sphericalangle DCE| = 45^\circ$.
52. Punkt E leży na ramieniu BC trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Wykaż, że prawdziwa jest równość $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle CDE|$.
53. W trapezie $ABCD$ na ramieniu BC wybrano punkt E w taki sposób, że $|DC| = |CE|$ oraz $|AB| = |BE|$. Wykaż, że $|\sphericalangle AED| = 90^\circ$.
54. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC . Wykaż, że $|\sphericalangle AOB| > |\sphericalangle ACB|$.
55. W trójkącie ABC połączono wierzchołek A z dowolnym punktem D boku BC . Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $2|AD| > |AB| + |AC| - |BC|$.
56. W trójkącie ABC dwusieczna kąta B przecina bok AC w punkcie M . Przez punkt M prowadzimy prostą równoległą do BC , która przecięła bok AB w punkcie N . Wykaż, że $|MN| = |BN|$.
57. Wykaż, że suma długości przekątnych wychodzących z 1 wierzchołka sześciokąta foremnego jest mniejsza od obwodu tego sześciokąta.
58. Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone w taki sposób, jak na rysunku. Wykaż, że $|AD| = |BE|$.
59. Wykaż, że połowa sumy dwóch boków trójkąta jest większa od środkowej poprowadzonej do 3 boku.
60. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E taki, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Wykaż, że pole równoległoboku $ABCD$ jest 4 razy większe od pola trójkąta DCE , gdzie AC to dłuższa przekątna równoległoboku.
61. Wykaż, że jeżeli przyprostokątne a i b trójkąta prostokątnego spełniają warunek $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$, to pole trójkąta wynosi $\frac{1}{14}a^2$.
62. Długość a boku rombu oraz długość jego przekątnych d_1 i d_2 spełniają warunek $d_1 \cdot d_2 = a^2$. Wykaż, że $\tan \alpha < 1$, gdzie α to kąt ostry rombu.
63. Korzystając z rysunku przedstawionego obok, wykonaj polecenia.
- Wykaż, że w dowolnym trapezie pola trójkątów AOD i COB są równe.
 - Wiadomo, że $|AO| : |OC| = 3 : 1$ oraz pole trójkąta AOD wynosi 18. Oblicz pole trapezu $ABCD$.
 - Wiadomo, że pole trapezu $ABCD$ jest równe 72 oraz $|DO| : |OB| = \frac{1}{5}$. Oblicz pole trójkątów: ABO , ADO , DCO , CBO .
64. Wysokość trójkąta wynosi 4 cm i dzieli podstawę o długości 9 cm w stosunku 1 : 8. Wyznacz długość odcinka równoległego do wysokości, dzielącego pole trójkąta na połowy.
65. Podstawy trapezu wynoszą $12\sqrt{3}$ i $4\sqrt{3}$, a kąty przy dłuższej podstawie mają miary 30° i 60° . Oblicz pole i obwód trapezu.
66. Pole trójkąta prostokątnego o kącie ostrym 30° wynosi $2\sqrt{3}$. Oblicz obwód.



↑ Zadanie 58



↑ Zadanie 63